



Universiteit
Utrecht

Faculteit Bètawetenschappen

Gecondenseerde verzamelingen

BACHELORSCRIPTIE

Thomas van Maaren

Wiskunde

Begeleiders:

Dr. Lennart Meier

Mathematisch instituut (Universiteit Utrecht)

Msc. Sven van Nigtevecht

Mathematisch instituut (Universiteit Utrecht)

10 juni 2024

Inhoudsopgave

Introductie

Topologie vormt de kern van vele vakgebieden binnen de wiskunde. Wel heeft topologie zijn beperkingen. Dit is waarom gecondenseerde verzamelingen zijn ontdekt. Gecondenseerde verzamelingen bieden ons een manier om topologieën te vervangen en helpen ons als we bijvoorbeeld kijken naar abelse groepen met een topologie.

In hoofdstuk één zullen wij het begrip van een product van een eindig aantal topologische ruimten gaan uitbreiden naar oneindige producten. We zullen zien dat er meerdere manieren zijn om zo een product te definiëren. Wel zullen we zien dat sommige definities handiger zijn dan anderen, omdat ze aan betere eigenschappen voldoen. Aan het einde van het hoofdstuk zullen we ook de stelling van Tychonoff bewijzen.

In hoofdstuk twee zullen wij met behulp van het oneindige product uit hoofdstuk 1 de categorie van pro-eindige verzamelingen introduceren. Ook geven we een karakterisatie van pro-eindige verzamelingen.

De eerste twee hoofdstukken fungeren als voorbereiding op het derde hoofdstuk. In het derde hoofdstuk zullen wij gecondenseerde verzamelingen gaan introduceren. We zullen ook laten zien hoe we een gecondenseerde verzameling vanuit een topologische ruimte kunnen construeren. Omgekeerd zullen we ook zien hoe topologische ruimtes benaderd kunnen worden vanuit gecondenseerde verzamelingen. Aan het einde van het hoofdstuk zullen we gaan kijken wat er gebeurt als we de topologie proberen te benaderen van een gecondenseerde verzameling, die gecreëerd is vanuit een topologie. We zullen zien dat deze benadering alleen goed gaat met sequentiele topologieën. Dit laatste is eigen werk. In de bronnen wordt er namelijk alleen gezegd hoe goed de benadering gaat als we kijken naar sequentiele topologieën. Er wordt niks gezegd over de benadering bij andere topologieën.

Voor deze scriptie is het aan te raden om een goed begrip te hebben van topologie. Alle basis-feiten in de topologie zullen aangenomen worden als algemene kennis. Daarnaast is het ook belangrijk om een goed begrip te hebben van categorieëentheorie. Categorieën, functoren, morfismes tussen categorieën, links- en rechtsgeadjungeerde functoren en equalizers zijn allemaal begrippen die we zullen beschouwen als algemene kennis.

Conventies

Hier geven we wat conventies die voor deze hele tekst zullen gelden:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Wat wij als pro-eindige verzamelingen beschouwen wordt doorgaands een lichte pro-eindige verzameling genoemd (zie opmerking 2.5).
- Wat wij als gecondenseerde verzamelingen beschouwen wordt doorgaands een lichte gecondenseerde verzameling genoemd (zie opmerking 3.2).
- Als wij het product nemen van topologische ruimtes doen we dit altijd met de producttopologie (zie definitie 1.7), tenzij anders vermeld wordt.

Hoofdstuk 1

De Producttopologie

In dit hoofdstuk zullen wij het begrip van een product van topologische ruimten uitbreiden naar een oneindig product. Eerst zullen we twee equivalente definities van het eindige product herhalen. Als we deze twee definities uitbreiden naar een oneindige variant, zullen we zien dat die twee verschillende topologieën opleveren. Eén daarvan noemen wij de doostopologie. Zoals we zullen zien is dit geen “handige” definitie. Wat we hiermee bedoelen is dat de doostopologie vaak niet voldoet aan de eigenschappen van de componenten. De andere heet de producttopologie en is wel “handig”. Dit betekent dat de producttopologie wel voldoet aan veel eigenschappen van de componenten. We zullen veel van deze eigenschappen bewijzen. Deze zullen later wanneer we het hebben over pro-eindige verzamelen erg nuttig zijn.

De belangrijkste eigenschap waar het product aan voldoet is dat het product van compacte ruimtes weer compact is. Dit is bewezen door Andrej Tychonov in 1930. Om dit te bewijzen zullen wij het begrip van een net introduceren. Met behulp van een net kunnen wij een heel eenvoudige karakterisatie geven van compacte ruimtes. Met behulp van het lemma van Zorn kunnen we bewijzen dat als de componenten van een product voldoen aan de karakterisatie, dat het product zelf ook moet voldoen aan de karakterisatie. Hieruit volgt dan de stelling van Tychonov.

De definities van de producttopologie (zie definitie 1.7) en die van de doostopologie (zie definitie 1.4) komen uit [1]. De eigenschappen waar de product topologie aan voldoet komen ook uit [1], maar de bewijzen zijn bijna altijd volledig eigen werk.

Het bewijs van Tychonov is gebaseerd op [3]. Wel is het zo dat er in deze bron op een aantal plekken wat grotere stappen gemaakt worden, zonder het verder toe te lichten. Wij zullen daarentegen elke stap in detail belichten.

1.1 Eindige producten

Voordat we kunnen kijken naar een algemene vorm van de producttopologie is het eerst handig om te herhalen wat de producttopologie is voor eindige producten. We zullen deze topologie opnieuw definiëren en wat eigenschappen dat het aan voldoet benoemen. De producttopologie is als volgt gedefinieerd .

Definitie 1.1. Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ twee topologische ruimten. Het product van $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ is gedefinieerd als $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$, waarbij:

$$\mathcal{T}_{X \times Y} := \langle U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \rangle.$$

In woorden is de producttopologie de kleinste topologie zodat het cartesisch product van opens in X met opens in Y open zijn in $X \times Y$. We kunnen nu ook twee afbeeldingen $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ en $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ definiëren als $\pi_1(x, y) = x$ en $\pi_2(x, y) = y$. Zulke functies worden vaak projecties genoemd. Het blijkt dat we de producttopologie ook kunnen definiëren in termen van deze projectie functies.

Lemma 1.2. *Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ twee topologische ruimten. Dan is het product $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ de kleinste topologie, zodat $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ en $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ continu zijn.*

Bewijs. Stel dat $\mathcal{T}'_{X \times Y}$ de kleinste topologie is zodat π_1 en π_2 continu zijn. Stel dat $U \in \mathcal{T}_X$ en $V \in \mathcal{T}_Y$. Dan geldt er dat $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$. Aangezien π_1 en π_2 continu zijn geldt er dat $U \times V \in \mathcal{T}'_{X \times Y}$. Omdat $\mathcal{T}_{X \times Y}$ de kleinste topologie is zodanig dat $U \times V$ open is voor alle U en V , zien we dat $\mathcal{T}_{X \times Y} \subset \mathcal{T}'_{X \times Y}$. We zien voor alle $U \in \mathcal{T}_X$ dat $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y}$ en voor alle $V \in \mathcal{T}_Y$ dat $\pi_2^{-1}(V) = X \times V \in \mathcal{T}_{X \times Y}$, dus π_1 en π_2 zijn continu onder de topologie van $\mathcal{T}_{X \times Y}$. Hieruit volgt dat $\mathcal{T}'_{X \times Y} \subset \mathcal{T}_{X \times Y}$. We concluderen dat $\mathcal{T}_{X \times Y} = \mathcal{T}'_{X \times Y}$. $\square$

Opmerking 1.3. Wanneer we kijken naar oneindige producten zullen we zien dat lemma 1.2 niet waar is. Dit zal er toe leiden dat we verschillende topologieën kunnen definiëren op het cartesisch product.

De topologie die we net gedefinieerd hebben is een erg “handige” definitie, aangezien het veel van de eigenschappen van X en Y behoudt. Stel bijvoorbeeld dat X en Y Hausdorff zijn, dan is $X \times Y$ dat ook. Hetzelfde geldt voor eerst-aftelbaarheid, twee-aftelbaarheid, metriseerbaarheid en compactheid.

1.2 Doostopologie

We zullen nu een eerste poging doen om de definitie van de producttopologie die we in sectie 1.1 hebben gezien uit te breiden naar oneindige producten. Hierbij hebben we een collectie $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$ van topologieën. Het cartesisch product is gedefinieerd als

$$\prod_{i \in I} X_i := \{x : I \rightarrow \sqcup_{i \in I} X_i \text{ waarbij } x_i \in X_i \text{ voor alle } i \in I\}.$$

Nu kunnen we een topologie definiëren op deze verzameling.

Definitie 1.4. [1, Definition 7.1] Zij $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$ een collectie topologieën. Dan definiëren we de **doostopologie** als $(X, \mathcal{T}_X)$, waarbij $X = \prod_{i \in I} X_i$ en

$$\mathcal{T}_X := \left\langle \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_{X_i} \text{ voor alle } i \in I \right\rangle.$$

Merk op dat deze definitie overeenkomt met definitie 1.1, behalve dat we nu gebruikmaken van arbitraire producten. Het is daarom wellicht opvallend dat we deze topologie een doostopologie noemen in plaats van de producttopologie. Dit komt omdat hoewel de definities heel erg op elkaar lijken, de eigenschappen tamelijk van elkaar verschillen. We zeiden aan het eind van sectie 1.1 dat de producttopologie “handig” was, aangezien het veel eigenschappen behoudt. Dit ligt bij de doostopologie heel erg anders en daarom heeft het een andere benaming.

Voorbeeld 1.5 (Componentsgewijze continuïteit). [1, p. 11]

Als voorbeeld zullen we nu een functie definiëren waarbij alle componenten continu zijn. In de producttopologie weten we dat dit betekent dat de functie zelf ook continu is. Alleen zullen we nu laten zien dat in de doos topologie dit niet noodzakelijkerwijs het geval is. Definieer

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \quad f_i(x) = x \text{ voor alle } i \in \mathbb{N}.$$

Merk op dat f_i voor alle $i \in \mathbb{N}$ de identiteit is, dus zijn alle componenten continu. We zien dat $\prod_{n \in \mathbb{N}} (-2^{-n}, 2^{-n})$ open is in de doostopologie. Merk op dat

$$f^{-1}\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} (-2^{-n}, 2^{-n})\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-2^{-n}, 2^{-n}) = \{0\},$$

en dus is f niet continu.

Voorbeeld 1.6 (Compactheid). Nog een eigenschap dat niet behouden blijft is compactheid. De eenvoudigste manier om dit te zien is door X te kiezen als een eindige verzameling met meer dan één element. Als we op X de discrete topologie nemen weten we dat X compact is. Als we nu de doostopologie nemen op $\prod_{n \in \mathbb{N}} X$ krijgen we opnieuw de discrete topologie, maar nu is $\prod_{n \in \mathbb{N}} X$ niet eindig, dus is het niet compact.

1.3 Producttopologie

Zoals in opmerking 1.3 gezegd werd geldt lemma 1.2 niet met oneindige producten. Dit zal ons de mogelijkheid geven om een andere topologie te definiëren op het oneindig cartesisch product. We kunnen net als bij eindige producten een projectie functie π_i voor alle $i \in I$ definiëren als

$$\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i \quad \pi_i(x) = x_i.$$

Dan definiëren we de producttopologie als volgt:

Definitie 1.7. [1, Definition 7.2] Zij $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$ een collectie topologieën. Dan definiëren we de **producttopologie** als $(X, \mathcal{T}_X)$ waarbij $X = \prod_{i \in I} X_i$ en $\mathcal{T}_X$ de kleinste topologie is zodanig dat π_i continu is voor alle $i \in I$.

In sectie 1.1 konden we nog zeggen dat deze definitie equivalent is aan de doostopologie. Dit bewezen we in lemma 1.2 door onder andere te argumenteren dat $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$. Dit argument kunnen we nu niet meer maken, aangezien we nu zouden krijgen dat $\prod_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i)$. Merk op dat we nu een oneindige doorsnede nemen van verzamelingen in de producttopologie. Aangezien oneindige doorsnedes van opens niet noodzakelijk open zijn hebben we geen garantie dat $\prod_{i \in I} U_i$ open is in de producttopologie.

Nu zullen we een basis vinden van deze topologie. Hierdoor zal het makkelijker zijn om het verschil te zien tussen de producttopologie en de doostopologie.

Lemma 1.8. [1, Definition 7.3] De producttopologie heeft de volgende basis:

$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_j \in \mathcal{T}_{X_j} \text{ voor alle } j \in J, U_j = X_j \text{ voor alle } i \in I \setminus J \mid \text{ een eindige } J \subset I \right\}. \quad (1.1)$$

In woorden is deze basis alle producten van opens uit X_i voor alle i , waarbij maar een eindige hoeveelheid van die opens ongelijk is aan X_i .

Bewijs. Stel dat U element is van (1.1). Dan weten we dat er een eindige J is zodanig dat $U_j \in \mathcal{T}_{X_j}$ voor alle $j \in J$ en $U_i = X_i$ voor alle $i \in I \setminus J$. We zien dan dat $U = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j)$. Per definitie zijn π_j voor alle $j \in J$ continu en aangezien J eindig is, is U open. We zien dus dat de topologie gegenereerd door (1.1) kleiner of gelijk is aan de producttopologie.

Voor alle $j \in I$ en $U_j \in \mathcal{T}_{X_j}$ geldt er dat $\pi_j^{-1}(U_j) = \prod_{i \in I} U_i$ waarbij $J = \{j\}$ en $U_i = X_i$ voor alle $i \neq j$. Dus zien we dat π_i continu is in de topologie gegenereerd door (1.1). Aangezien de producttopologie de kleinste topologie is zodanig dat π_i voor alle $i \in I$ continu zijn is de producttopologie kleiner of gelijk aan de topologie gegenereerd door (1.1).

We concluderen dat de twee topologieën gelijk zijn. □

Opmerking 1.9. Door lemma 1.8 zien we dat voor een open U in $\prod_{i \in I} X_i$ geldt dat er een eindige $J \subset I$ bestaat zodat $\pi_i(U) = X_i$ voor alle $i \in I \setminus J$. Een gevolg hiervan is dat het product van discrete topologieën niet altijd een discrete topologie is.

We zullen nu zien dat de producttopologie “handiger” is dan de doostopologie. Bij de doostopologie hadden we bijvoorbeeld het probleem dat componentsgewijze continuïteit geen continuïteit impliceert (zie voorbeeld 1.5) en dat compactheid niet behouden blijft (zie voorbeeld 1.6). Bij de Producttopologie is dit anders. We zullen nu bewijzen dat componentsgewijze continuïteit wel continuïteit impliceert en in sectie 1.4 zullen we zien dat compactheid ook behouden blijft.

Lemma 1.10. [1, Proposition 4.14] Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte en $\{(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})\}_{i \in I}$ een collectie topologische ruimtes. Als $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ componentsgewijs continu is, dan is f ook continu.

Bewijs. Zij U een open in $\prod_{i \in I} Y_i$. Dan kunnen we wegens lemma 1.8 zonder verlies van algemeenheid zeggen dat $U = \prod_{i \in I} U_i$ waarbij er een eindige $J \subset I$ zodat U_j open is in Y_j voor alle $j \in J$ en $U_i = Y_i$ voor alle $i \in I \setminus J$. Dit betekent ook dat $f_i^{-1}(U_i) = X$ voor alle $i \in I \setminus J$. We zien dan dat

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\prod_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} (f_i)^{-1}(U_i) = \bigcap_{j \in J} (f_j)^{-1}(U_j). \quad (1.2)$$

Omdat U_j open is en f_j continu is zien we dat $(f_j)^{-1}(U_j)$ open is voor alle $j \in J$. Om J een eindige verzameling is, concluderen we dat $f^{-1}(U)$ open is. $\square$

1.3.1 Aftelbare producten

We zagen net dat de producttopologie een handige definitie is, omdat veel eigenschappen behouden blijven. Als we nu kijken naar producten van de vorm

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

dan zal het mogelijk zijn om nog meer eigenschappen te bewijzen. We zullen zien dat een aftelbaar product van metriseerbare ruimtes, metriseerbaar is.

Stelling 1.11. [1, Proposition 4.8] Zij $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een aftelbare collectie van metriseerbare ruimtes, dan is $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ook metriseerbaar.

Bewijs. We zullen gegeven een metriek d_n op X_n voor alle $n \in \mathbb{N}$ een metriek d op $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ definiëren. Dit doen we op een soortgelijke manier als in [1, Proposition 4.8]:

$$d(x, y) = \sup\{2^{-n} \overline{d}_n(x, y) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

waarbij

$$\overline{d}_n(x, y) = \min\{d_n(x, y), 1\}.$$

We zullen eerst bewijzen dat π_m continu is voor alle $m \in \mathbb{N}$. Zij U een open in X_m . We willen nu bewijzen dat $\pi_m^{-1}(U)$ open is in X . Zij $x \in \pi_m^{-1}(U)$, dan zien we dat $x_m \in U$, dus bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $B_m(x_m, \delta) \subset U$. We zien nu dat

$$\begin{aligned} B(x, 2^{-m}\delta) &= \{y \in X \mid \sup\{2^{-n} \overline{d}_n(x, y) \mid n \in \mathbb{N}\} < 2^{-m}\delta\} \\ &\subset \{y \in X \mid d_m(x, y) < \delta\} \\ &\subset \{y \in X \mid y_m \in B_m(x_m, \delta)\} \\ &\subset \pi_m^{-1}(U). \end{aligned}$$

en dus zien we dat π_m voor alle $m \in \mathbb{N}$ continu is.

Omgekeerd zien we ook dat als π_m continu is voor alle $m \in \mathbb{N}$ dat $B(x, \delta)$ open is voor alle $x \in X$ en $\delta > 0$. Zij $y \in B(x, \delta)$ en $c > 0$ zodat $B(y, c) \subset B(x, \delta)$. We zien dat

$$\begin{aligned} B(x, \delta) &\supset \overline{B(y, c/2)} \\ &= \prod_{n \in \mathbb{N}} \{z_n \in X_n \mid 2^{-n} \bar{d}(z_n, y_n) \leq c/2\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^{-1}(\{z_n \in X_n \mid 2^{-n} \bar{d}(z_n, y_n) \leq c/2\}). \end{aligned}$$

Als $c/2 > 2^{-n}$ dan zien we dat $2^{-n} \bar{d}(z_n, y_n) \leq c/2$ voor alle $z_n \in X_n$, dus

$$\begin{aligned} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}, 2^{-n} \geq c/2} \pi_n^{-1}(\{z_n \in X_n \mid 2^{-n} \bar{d}(z_n, y_n) \leq c/2\}) \\ &\supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}, 2^{-n} \geq c/2} \pi_n^{-1}(B_n(y_n, 2^n c/2)). \end{aligned}$$

Aangezien $c > 0$ is een eindige hoeveelheid aan $n \in \mathbb{N}$, zodat $2^{-n} \geq c/2$. We zien dus dat elke punt in $B(x, \delta)$ een open omgeving heeft, dus is $B(x, \delta)$ open in de producttopologie. $\square$

1.4 Stelling van Tychonov

De stelling van Tychonov luidt als volgt:

Stelling 1.12. *Zij $\{X_i\}_{i \in I}$ een collectie compacte topologieën. Dan is $\prod_{i \in I} X_i$ met de producttopologie ook compact.*

Voor eindige producten van compacte topologische ruimten weten we al dat die compact zijn. De stelling van Tychonov zegt dat voor oneindige producten hetzelfde geldt. Het bewijs maakt gebruik van het keuzeaxioma. Dit is noodzakelijk, aangezien het keuzeaxioma ook uit de stelling van Tychonov volgt [3, Theorem 9]. We zullen eerst het lemma van Zorn benoemen. Daarna zullen we het concept van een net introduceren. Dit kan gezien worden als een veralgemenisering van een rij. Hierna zullen wij ook accumulatiepunten introduceren en wat stellingen hierover bewijzen. Wat blijkt is dat we compacte ruimtes kunnen karakteriseren vanuit netten en hun accumulatiepunten. Dit zal ervoor zorgen dat we de stelling van Tychonov kunnen bewijzen.

1.4.1 Het keuzeaxioma en het lemma van Zorn

Het keuzeaxioma luidt als volgt:

Voor alle collecties niet-lege verzamelingen $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ bestaat er een functie $f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ zodanig dat $f(\lambda) \in X_\lambda$ voor alle $\lambda \in \Lambda$. [3, p. 2]

Voordat we kunnen kijken naar het lemma van Zorn moeten we eerst definiëren wat het betekent dat een verzamelingen partiële en totale ordening heeft.

Definitie 1.13. [3, p. 2] Een paar $(P, \leq)$ waarbij P een verzameling is en $\leq$ een relatie, is een **partiële ordening** als het voor alle $x, y, z \in P$ voldoet aan:

- **Reflexiviteit:** $x \leq x$.
- **Antisymmetrie:** Als $x \leq y$ en $y \leq x$ dan $x = y$.
- **Transitiviteit:** Als $x \leq y$ en $y \leq z$ dan $x \leq z$.

Een verzameling met een totale ordening heeft nog een extra eigenschap.

Definitie 1.14. [3, p. 2] Een verzameling met partiële ordening $(T, \leq)$ heeft een **totale ordening** als voor alle $x, y \in T$ geldt dat $x \leq y$ of $y \leq x$.

Voor een verzameling met partiële ordening P en een deelverzameling $D \subset P$ zeggen we dat D een **boven-grens** heeft als er een $b \in P$ bestaat zodat $d \leq b$ voor alle $d \in D$. Een **maximum** van P is een element $m \in P$ waarbij voor alle $p \in P$ geldt dat als $m \leq p$ dat $p = m$. [3, p. 2]

Lemma 1.15 (Zorn). [3, p. 2] *Stel dat $(P, \leq)$ een niet-lege verzameling is met partiële ordening. Als voor elke deelverzameling met totale ordening $T \subset P$ geldt dat het begrensd is, dan heeft P een maximum.*

1.4.2 Karakterisatie van compacte ruimtes

Voordat we Tychonov zullen bewijzen geven we eerst een karakterisatie van compacte ruimtes. In de topologie hebben we al veel karakterisaties gezien. In $\mathbb{R}^n$ weten we bijvoorbeeld dat een verzameling compact is dan en slechts dan als het gesloten en begrensd is. Voor metrische ruimten weten we dat een verzameling compact is dan en slechts dan als het rijcompact is. Deze karakterisaties houden helaas geen stand als we kijken naar algemene compacte verzamelingen. Hiervoor hebben we een algemener begrip van rijen nodig, namelijk een net.

Bij een rij zijn de indices altijd natuurlijke getallen. Bij een net kan dit een willekeurige verzameling zijn. Wel is het belangrijk dat het een gerichte verzameling is.

Definitie 1.16. [2, Definition 4.2] Een **gerichte verzameling** $(T, \leq)$ is een partiële ordening met de eigenschap dat als $a, b \in T$, dat er een $c \in T$ bestaat zodanig dat $a \leq c$ en $b \leq c$. In andere woorden: Elke eindige deelverzameling is begrensd.

Dan kunnen we nu een net definiëren.

Definitie 1.17. [2, Definition 4.3] Stel dat X een topologische ruimte is en Λ een gerichte verzameling. Dan is een **net** een functie $x_\bullet : \Lambda \rightarrow X$. Dit wordt ook wel genoteerd als $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Als laatste zullen we ook accumulatiepunten introduceren.

Definitie 1.18 (Accumulatiepunt). [3, Definition 2] Stel dat X een topologische ruimte is en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net. We zeggen dat $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ accumulatiepunt a heeft dan en slechts dan als voor alle open omgevingen U van a en $\mu \in \Lambda$ er een $\lambda \geq \mu$ bestaat zodat $x_\lambda \in U$.

We zullen nu zien dat een topologische ruimte compact is dan en slechts dan als voor elke net geldt dat het een accumulatiepunt heeft.

Stelling 1.19. [3, Theorem 8] *Zij X een topologische ruimte, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

- (i) X is compact
- (ii) Alle netten in X hebben een accumulatiepunt.

Bewijs.

(i) $\implies$ (ii): Stel eerst dat X compact is en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net in X is. Definieer nu

$$A_\mu := \overline{\{x_\lambda | \lambda \geq \mu\}} \text{ en } A := \bigcap_{\mu \in \Lambda} A_\mu$$

We zullen nu laten zien dat alle punten in A accumulatiepunten zijn. Stel namelijk dat $a \in A$. Dan geldt er voor alle omgevingen U van a en alle $\mu \in \Lambda$ dat $U \cap \{x_\lambda | \lambda \geq \mu\} \neq \emptyset$, oftewel er is een $\lambda \geq \mu$, zodanig dat $x_\lambda \in U$. Dit is precies de definitie van een accumulatiepunt en dus is A een verzameling accumulatiepunten. Nu moeten we alleen nog laten zien dat A niet leeg kan zijn. Stel dat $A = \emptyset$, dan zien we dat $X = X \setminus A = \bigcup_{\mu \in \Lambda} X \setminus A_\mu$ en dus is $\{X \setminus A_\mu\}_{\mu \in \Lambda}$ een open dekking van X . Uit de definitie van compactheid volgt dat dat er een eindige $M \subset \Lambda$ bestaat zodat $\bigcup_{\mu \in M} X \setminus A_\mu = X$. Dit betekent ook dat $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \emptyset$. Aangezien Λ een gerichte verzameling is en M eindig is bestaat er

een $\kappa \in \Lambda$ zodanig dat $\kappa \geq \mu$ voor alle $\mu \in M$. Dit betekent dat $A_\kappa \subset A_\mu$ voor alle $\mu \in M$ en dus $\emptyset \neq A_\kappa \subset \bigcap_{\mu \in \Lambda} A_\mu$. Dit is een tegenspraak met dat $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \emptyset$.

$\neg(\text{i}) \implies \neg(\text{ii})$: Stel nu dat X niet compact is. Dan bestaat er een open dekking $\mathcal{U}$ die geen eindige deelcollectie heeft die heel X dekt. Als we kijken naar alle eindige deelcollecties van $\mathcal{U}$ kunnen we dit een ordening geven. We kijken dan naar de volgende geordende verzameling:

$$\Lambda := (\{\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \mid \mathcal{V} \text{ is eindig}\}, \subset).$$

Merk op dat dat deze geordende verzameling ook een gerichte verzameling is. Als $\mathcal{V} \in \Lambda$ en $\mathcal{W} \in \Lambda$ dan is $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ ook eindig en een bovengrens van $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$. We kunnen nu voor iedere eindige $\mathcal{V} \in \Lambda$ een $x_\mathcal{V} \in X$ vinden zodanig dat $x_\mathcal{V} \notin \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$. We zien dan dat $(x_\mathcal{V})_{\mathcal{V} \in \Lambda}$ een net is in X . We laten nu zien dat het geen accumulatiepunt heeft. Stel namelijk dat $x \in X$ en $U \in \mathcal{U}$, zodat $x \in U$. We zien dat voor alle $\mathcal{V} \in \Lambda$ met $\mathcal{V} \supset \{U\}$ geldt dat $x_\mathcal{V} \notin U$, dus is x geen accumulatiepunt.

□

1.4.3 Extra beweringen over netten

Om de stelling van Tychonov te kunnen bewijzen moeten er nog wat extra uitspraken gedaan worden over netten.

Net als een rij kan een net convergeren en kunnen er deelnetten genomen worden.

Definitie 1.20 (Convergentie van een net). Zij X een topologische ruimte. Een net $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in X convergeert naar x dan en slechts als voor elke open omgeving U van x er een $\mu \in \Lambda$ bestaat zodanig dat $x_\lambda \in U$ voor alle $\lambda \in \Lambda$ met $\lambda \geq \mu$.

Definitie 1.21 (Deelnet). [3, Definition 3] Zij $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net. Zij $\mathcal{D}$ een gerichte verzameling en $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \Lambda$ een functie met de eigenschap dat als $a, b \in \mathcal{D}$ en $a \leq b$ dat $\phi(a) \leq \phi(b)$ (**monotonie**) en dat voor elke $\mu \in \Lambda$ er een $c \in \mathcal{D}$ bestaat zodat $\phi(c) \geq \mu$ (**finaliteit**). Dan is $(x_{\phi(\kappa)})_{\kappa \in \mathcal{D}}$ een deelnet van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Nu zullen we wat lemma's bewijzen die niet in [3] genoemd worden.

We zullen eerst bewijzen dat voor een accumulatiepunt van een net er een deelnet is die naar dat punt convergeert. Dit zal erg handig blijken voor het bewijs van Tychonov

Lemma 1.22. *Zij X een topologische ruimte en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net in X . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

- (i) a is een accumulatiepunt van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.
- (ii) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ heeft een deelnet die naar a convergeert.

Bewijs.

(i) $\implies$ (ii): Stel dat a een accumulatiepunt is van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. We definiëren nu de volgende gerichte verzameling:

$$\mathcal{D} := (\{(\lambda, U) \mid U \text{ is een open omgeving van } a \text{ en } x_\lambda \in U, \lambda \in \Lambda\}, \leq)$$

hierbij definiëren we $\leq$ als

$$(\lambda, U) \leq (\mu, V) \text{ dan en slechts dan als } \lambda \leq \mu \text{ en } U \supset V$$

$\mathcal{D}$ is een gerichte verzameling. Stel namelijk dat $(\lambda, U), (\mu, V) \in \mathcal{D}$. We weten dan dat $W := U \cap V$ ook een open omgeving is van a . Doordat Λ een gerichte verzameling is bestaat er $\kappa \in \Lambda$ zodanig dat $\kappa \geq \lambda, \mu$. Door de definitie van een accumulatiepunt bestaat er een $\nu \geq \kappa'$ zodanig dat $x_\nu \in W$ en dus zien we dat $(\nu, W) \in \mathcal{D}$ en $(\nu, W) \geq (\lambda, U), (\mu, V)$.

Als we nu $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \Lambda$ definiëren als $\phi(\lambda, U) = \lambda$ dan zien we dat ϕ monotoon is en finaal dus is $(x_{\phi(\lambda, U)})_{(\lambda, U) \in \mathcal{D}}$ een deelnet van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Voor alle open omgevingen $U \ni a$ weten we dat er een $\mu \in \Lambda$

bestaat zodat $x_\mu \in U$. Voor alle $(\lambda, V) \in \mathcal{D}$ met $(\lambda, V) \geq (\mu, U)$ zien we dat $x_{\phi(\lambda, V)} = x_\lambda \in V \subset U$, dus convergeert $(x_{\phi(\lambda, U)})_{(\lambda, U) \in \mathcal{D}}$ naar a .

- (ii) $\implies$ (i): Stel nu andersom dat $(x_{\phi(\kappa)})_{\kappa \in \mathcal{D}}$ een deelnet is die naar a convergeert. Zij U een open omgeving en $\mu \in \Lambda$. Door de co-finaliteit van ϕ bestaat er een $\kappa \in \mathcal{D}$ zodat $\phi(\kappa) \geq \mu$ en door de convergentie van $(x_{\phi(\kappa)})_{\kappa \in \mathcal{D}}$ bestaat er een $\kappa' \in \mathcal{D}$ zodat als $\lambda \geq \kappa'$ dat $x_{\phi(\lambda)} \in U$. Doordat $\mathcal{D}$ een gerichte verzameling is bestaat er een $\lambda \geq \kappa', \kappa$, dus geldt er dat $x_{\phi(\lambda)} \in U$ en vanwege de monotonie van ϕ zien we dat $\phi(\lambda) \geq \phi(\kappa) \geq \mu$, dus is a een accumulatiepunt van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

□

We weten dat als een rij convergeert, dat alle deelrijen naar hetzelfde punt convergeren. Nu zullen we zien dat als een net convergeert, dat alle deelnetten naar hetzelfde punt convergeren.

Lemma 1.23. *Zij X een topologische ruimte en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net die naar $a \in X$ convergeert. Zij $(x_{\phi(\mu)})_{\mu \in \mathcal{D}}$ een deelnet, dan convergeert $(x_{\phi(\mu)})_{\mu \in \mathcal{D}}$ ook naar a .*

Bewijs. Zij U een open omgeving van a . We weten dat er een $\mu' \in \Lambda$ bestaat zodanig dat voor alle $\lambda \geq \mu'$ geldt dat $x_\lambda \in U$. Door de finaliteit ϕ weten we dat er een $\mu \in \mathcal{D}$ bestaat zodanig dat $\phi(\mu) \geq \mu'$. Voor alle $\kappa \geq \mu$ zien we door de monotonie van ϕ dat $\phi(\kappa) \geq \phi(\mu) \geq \mu'$, dus geldt er dat $x_{\phi(\kappa)} \in U$. □

Net als bij rijen geldt er dat componentsgewijze convergentie equivalent is aan convergentie.

Lemma 1.24. *Zij $\{X_i\}_{i \in I}$ een collectie topologische ruimtes, $X = \prod_{i \in I} X_i$ en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net in X . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

- (i) $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ convergeert naar $a \in X$
- (ii) Voor alle $k \in I$ geldt dat $\{x_\lambda|_{\{k\}}\}_{\lambda \in \Lambda}$ convergeert naar $a|_{\{k\}}$.

Bewijs.

- (i) $\implies$ (ii) Stel dat (i) waar is. Zij $k \in I$ en U_k een open omgeving van $a|_k$. Definieer $U_i = X_i$ als $i \neq k$, dan is $U := \prod_{i \in I} U_i$ een open omgeving van a . Vanwege (i) bestaat er een $\mu \in \Lambda$ zodanig dat voor alle $\lambda \geq \mu$ geldt dat $x_\lambda \in U$, dus $x_\lambda|_{\{k\}} \in U_k$.
- (ii) $\implies$ (i) Stel nu dat (ii) waar is. Stel dat U een open omgeving is van a . Door lemma 1.8 kunnen we zonder verlies van algemeenheid zeggen dat U element is van (1.1). We zullen nu J uit (1.1) gebruiken. Door (ii) weten we dat voor alle $j \in J$ geldt dat er een $\mu_j \in \Lambda$ bestaat, zodat voor alle $\lambda \geq \mu_j$ geldt dat $x_\lambda|_{\{j\}} \in U_j$. Aangezien J eindig is bestaat en omdat Λ een gerichte verzameling is bestaat er een $\mu \in \Lambda$ zodat $\mu \geq \mu_j$ voor alle $j \in J$. Dus voor alle $\lambda \geq \mu$ zien we dat $x_\lambda|_J \in \prod_{j \in J} U_j$. Aangezien $U_i = X_i$ voor alle $i \in I \setminus J$ zien we dat $x_\lambda \in U$.

□

1.4.4 Bewijs van Tychonov

In deze hele sectie is $\{X_i\}_{i \in I}$ een collectie compacte topologische ruimten, $X = \prod_{i \in I} X_i$ en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net in X . Ook definiëren we de volgende partieel geordende verzameling:

$$P := (\{(a, J) \mid a \text{ is een accumulatiepunt van het net } (x_\lambda|_J)_{\lambda \in \Lambda} \mid J \subset I\}, \leq)$$

Hierbij zeggen we dat $(a, J) \leq (a', J')$ dan en slechts dan als $J \subset J'$ en $a'|_J = a$.

Nu zullen we de stelling van Tychonov bewijzen op dezelfde manier als in [3, p. 6], alleen zullen wij het bewijs voorzien van meer toelichting en het opsplitsen in verschillende lemma's.

Lemma 1.25. *Zij $T \subset P$ een totaal geordende verzameling, dan heeft T een bovengrens.*

Bewijs. Stel dat we een totale geordende deelverzameling $T \subset P$ hebben. We zullen bewijzen dat T een bovengrens moet hebben. Kies namelijk (m, K) waarbij voor alle $k \in K$

$$m_k = a_k \text{ voor alle } (a, J) \in T \text{ met } k \in J \quad (1.3)$$

en

$$K = \bigcup_{(a, J) \in T} J. \quad (1.4)$$

Aangezien T een geordende deelverzameling is geldt er voor alle $(a, J), (a', J') \in T$ zonder verlies van algemeenheid dat $(a, J) \leq (a', J')$. Dit betekent dat de accumulatiepunten onderling gelijk zijn op hun gemeenschappelijk indices. Hierdoor is (1.3) goed gedefinieerd. Ook geldt voor alle $(a, J) \in P$ dat $J \subset K$ en $m|_J = a$, dus (m, K) is een bovengrens van T .

Nu hoeven we alleen nog te bewijzen dat m een accumulatiepunt is van $(x_\lambda|_K)_{\lambda \in \Lambda}$. Zij $U \subset \prod_{i \in K} X_i$ een open omgevingen van m . Door lemma 1.8 kunnen we zonder verlies van algemeenheid zeggen dat $U = \prod_{i \in K} U_i$ waarbij $U_l \subset X_l$ open is voor alle $l \in L$ en $U_i = X_i$ voor alle $i \in K \setminus L$. Hierbij is L een eindige $L \subset K$. We weten dat er een $(a, J) \in T$ bestaat zodanig dat $L \subset J$. Aangezien $\prod_{i \in J} U_i$ een open omgeving is van $m|_J = a$ en a een accumulatiepunt is van $(x_\lambda|_J)_{\lambda \in \Lambda}$ geldt voor alle $\mu \in \Lambda$ dat voor een $\lambda \geq \mu$ geldt dat $x_\lambda|_J \in \prod_{i \in J} U_i$, dus ook $x_\lambda|_L \in \prod_{i \in L} U_i$. Aangezien $U_i = X_i$ voor alle $i \in K \setminus L$ zien we dat $x_\lambda|_K \in \prod_{i \in K} U_i$, dus is m een accumulatiepunt van $(x_\lambda|_K)_{\lambda \in \Lambda}$ en geldt er dat $(m, K) \in P$. □

Lemma 1.26. *P heeft een maximum.*

Bewijs. Merk ten eerste op dat P niet leeg is. Uit stelling 1.19 volgt namelijk dat voor willekeurige $i \in I$ geldt dat $(x_\lambda|_{\{i\}})_{\lambda \in \Lambda}$ een accumulatiepunt a heeft, dus geldt $(a, \{i\}) \in P$. Door lemma 1.25 weten we dat iedere totaal geordende verzameling $T \subset P$ begrensd is. Door het lemma van Zorn weten we dat dit betekent dat P een maximum heeft. □

Lemma 1.27. *Als $(a, J) \in P$ en $J \subsetneq I$ dan bestaat er een $(a', J') \in P$ zodanig dat $(a, J) \leq (a', J')$ en $J \neq J'$.*

Bewijs. Stel nu dat $(a, J) \in P$ en $J \subsetneq I$. We weten dan door lemma 1.22 dat $(x_\lambda|_J)_{\lambda \in \Lambda}$ een deelnet $(x_{\phi(\mu)}|_J)_{\mu \in M}$ heeft die naar a convergeert. Neem nu $k \in I \setminus J$. Uit stelling 1.19 volgt dat $(x_{\phi(\mu)}|_{\{k\}})_{\mu \in M}$ een accumulatiepunt b heeft, dus heeft het een deelnet $(x_{\phi(\chi(\nu))}|_{\{k\}})_{\nu \in N}$ die naar b convergeert. Door lemma 1.23 convergeert $(x_{\phi(\chi(\nu))}|_J)_{\nu \in N}$ naar a . Door lemma 1.24 convergeert $(x_{\lambda_{\mu\nu}}|_{J \cup \{k\}})_{\nu \in N}$ naar a' waarbij $a'_j = a_j$ voor alle $j \in J$ en $a'_k = b$. Door lemma 1.22 geldt er dat a' een accumulatiepunt is van $(x_\lambda|_{J \cup \{k\}})_{\lambda \in \Lambda}$. We zien dan dat $(a', J \cup \{k\}) \in P$ en dat $(a, J) \leq (a', J \cup \{k\})$. □

Nu kunnen we de stelling van Tychonov bewijzen. Hiervoor hoeven we alleen te bewijzen dat X compact is.

Bewijs van Tychonov. Wegens lemma 1.26 heeft P een maximum (a, J) . Stel nu dat $J \subsetneq I$ dan weten we wegens lemma 1.27 dat er een $(a', J') \in P$ zodanig dat $(a, J) \leq (a', J')$ en $J \neq J'$. Dit zou betekenen dat (a, J) geen maximum is en dus moet er gelden $J = I$. Hieruit volgt dat a een accumulatiepunt is van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Hieruit concluderen we dat alle netten in $\prod_{i \in I} X_i$ een accumulatiepunt hebben en dus is het wegens stelling 1.19 compact. □

Hoofdstuk 2

Pro-eindige verzamelingen

In dit hoofdstuk zullen wij de definitie geven van een pro-eindige verzameling. Er moet wel opgemerkt worden dat wat wij beschouwen als een pro-eindige verzameling doorgaands een lichte pro-eindige verzameling genoemd wordt (zie opmerking wrefEigenlijkLichtProEindig). Daarna zullen we wat voorbeelden geven van pro-eindige verzamelingen. Een belangrijk voorbeeld hiervan is de Cantorverzameling. Aan het einde van het hoofdstuk zullen we ook een karakterisatie geven van pro-eindige verzamelingen. We gebruiken in deze bewijzen de resultaten uit hoofdstuk 1 over de producttopologie.

De definitie van een pro-eindige verzameling is afkomstig van [4, p. 7-8]. De voorbeelden van pro-eindige verzamelingen zijn afkomstig van [5, afl. 2; 27:49-29:30]. Ook de karakterisatie van pro-eindige verzamelingen is hier van afkomstig [5, afl. 2; 41:29-41:55]. Het bewijs dat de voorbeelden voldoen aan de definitie van pro-eindige verzamelingen is eigen werk. Ook is het bewijs dat pro-eindige verzamelingen voldoen aan de karakterisatie eigen werk.

2.1 Definitie en voorbeelden

Definitie 2.1. [4, p. 7] Een **invers systeem** in een categorie $\mathcal{C}$ is een collectie objecten $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ samen met een collectie morfismen $(f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Voor een invers systeem van topologieën zullen we nu een inverse limiet bepalen.

Definitie 2.2. [4, p. 8] Zij $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een collectie topologische ruimten en $(f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een collectie continue afbeeldingen. De **inverse limiet** is gedefinieerd als volgt:

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid f_n(x_{n+1}) = x_n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \right\},$$

waarbij $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ de deeltopologie heeft van $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Opmerking 2.3. Eigenlijk is $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ misbruik van notatie, omdat het naast $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ook afhankelijk is van $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Elke keer dat een inverse limiet gebruikt wordt zal het uit de context duidelijk moeten zijn wat deze morfismen zijn.

Definitie 2.4. [4, p. 8] Een topologische ruimte is **pro-eindig** als het homeomorf is met een inverse limiet van eindige, discrete topologieën.

Opmerking 2.5. De definitie van een pro-eindige verzameling die we hier geven is anders dan de gebruikelijke definitie van pro-eindige verzamelingen. Wat wij hier duiden als een pro-eindige verzameling wordt doorgaands een lichte pro-eindige verzameling genoemd. Toch zullen wij deze verzamelingen aanduiden als pro-eindige verzamelingen, aangezien we geen andere pro-eindige verzamelingen tegen zullen komen.

Om te bewijzen dat een topologische ruimte pro-eindig is moeten we eerst een invers systeem opstellen en dan bewijzen dat de ruimte homeomorf is aan de inverse limiet van het systeem. Om dit laatste te bewijzen is het nodig om een homeomorfisme op te stellen. Het lijkt misschien vrij omslachtig om te bewijzen dat een functie naar een inverse limiet continu is met de topologie die we hier gegeven hebben. Vandaar dat we nu een lemma geven waardoor het makkelijker zal zijn om te zien of een afbeelding die naar een pro-eindige verzameling gaat continu is.

Lemma 2.6. *Zij T een topologische ruimte en $\{X_i\}_{i \in I}$ een collectie topologische ruimtes. Als voor $F : T \rightarrow \varprojlim_{i \in I} X_i$ geldt dat F_i voor alle $i \in I$ continu zijn, dan is F continu.*

Bewijs. Zij $\iota : \varprojlim_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ de inclusie. Aangezien $\varprojlim_{i \in I} X_i$ de deeltopologie heeft, is F continu als $\iota \circ F$ continu is. Vanwege lemma 1.10 weten we dat $\iota \circ F$ continu is als $\pi_i \circ \iota \circ F = \pi_i \circ F$ continu is. We concluderen dus dat F continu is als het continu is in zijn componenten. $\square$

Voorbeeld 2.7. [5, afl. 2, 27:49-28:36]. Een voorbeeld van een pro-eindige verzameling is $\mathbb{N} \cup \infty$ met met de volgende topologische basis:

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{\{N\}, \{N, N+1, \dots, \infty\}\}.$$

Deze topologische ruimte noteren we met $\mathbb{N}^\infty$.

Om te laten zien dat voorbeeld 2.7 een pro-eindige verzameling is moeten we een homeomorfisme opstellen met een inverse limiet. Voor het inverse systeem moeten we een collectie eindige verzamelingen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiëren samen met een collectie afbeeldingen $(f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dit doen we als volgt:

$$\begin{aligned} X_0 &:= \{\infty\} \\ X_n &:= X_{n-1} \cup \{n-1\} \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

En de morfismes definiëren we zodat alles dat niet naar zichzelf gestuurd kan worden naar oneindig wordt gestuurd:

$$f_n(m) = \begin{cases} m & \text{als } m < n \\ \infty & \text{anders} \end{cases}.$$

Nu moeten we een homeomorfisme $F : \mathbb{N}^\infty \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ definiëren:

$$F_n(m) = \begin{cases} m & \text{als } m < n \\ \infty & \text{anders} \end{cases}.$$

Dat F injectief is, is triviaal. Nu zullen we bewijzen dat F surjectief is. Stel dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Als voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $x_n = \infty$ dan zien we dat $F(\infty) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Als er niet geldt dat $x_n = \infty$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ nemen we de kleinste $m \in \mathbb{N}$ zodanig dat $x_m \neq \infty$. Er geldt dat $x_m \in X_m$, dus $x_m \leq m-1$. Bovendien geldt er dat $f_{m-1}(x_m) = x_{m-1} = \infty$, dus $x_m \geq m-1$. Hieruit volgt dat $x_m = m-1$. Aangezien $f_n(x_{n+1}) = x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ zien we met inductie dat $x_n = m-1$ voor alle $n \geq m$. We zien dus dat $F(m-1) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Door lemma 2.6 is het voldoende om te bewijzen dat de componenten van F continu zijn. Observeer dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $m \in X_n \setminus \{\infty\}$ geldt dat $F_n^{-1}(\{m\}) = \{m\}$ en dat $F_n^{-1}(\{\infty\}) = \{n, n+1, \dots, \infty\}$. Het teruggehaald beeld van alle singletons zijn open en dus is F_n continu, waaruit we kunnen concluderen dat F ook continu is.

Onthoudt dat $\mathbb{N}^\infty$ een gesloten deelruimte is van de compactificatie van de reële getallen $\mathbb{R}^\infty$. Hieruit volgt dat $\mathbb{N}^\infty$ compact is. Ook zullen we later in lemma 2.9 bewijzen dat alle pro-eindige verzamelingen Hausdorff zijn. We kunnen hieruit concluderen dat F^{-1} ook continu is en dus is F een homeomorfisme.

Voorbeeld 2.8. [5, 28:52-29:30] Een ander voorbeeld van een pro-eindige verzameling is de **Cantorverzameling**. Onthoudt dat de Cantorverzameling gelijk is aan

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n, \text{ waarbij } C_0 := [0, 1] \text{ en } C_n := \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(1 - \frac{1}{3}C_{n-1}\right) \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Net als in het eerdere voorbeeld moeten we een invers systeem definiëren. Definieer X_n als de verzameling van componenten van C_n . We zien dan bijvoorbeeld dat $X_2 = \{[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]\}$. Voor ons invers systeem hebben we ook nog morfismes nodig. Om deze te definiëren zal het ons helpen om eerst een afbeelding

$$G : C \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

te construeren. We definiëren $G_n(x) \in X_n$ als de unieke $[a, b] \in X_n$ zodanig dat $x \in [a, b]$. Het is ook mogelijk om G_n expliciet uit te schrijven als:

$$G_n(x) = \left[\left\lfloor \frac{x3^n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{2}{3^n}, \left\lfloor \frac{x3^n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{2}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right]. \quad (2.1)$$

Nu kunnen we $f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ simpelweg definiëren als $f_n([a, b]) = G_n(a) = G_n(b)$.

Wat zal blijken is dat het beeld van G precies gelijk is aan $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$. We kunnen dus $F : C \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ definiëren als $F(x) = G(x)$. We laten nu zien dat F daadwerkelijk goed gedefinieerd is. Voor willekeurige $x \in C$ en $n \in \mathbb{N}$ bestaat er een unieke $[a_n, b_n] \in X_n$ zodat $x \in [a_n, b_n]$ en een unieke $[a_{n+1}, b_{n+1}] \in X_{n+1}$ zodat $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Bovendien zien we ook dat $F_n(x) = [a_n, b_n]$ en $F_{n+1}(x) = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. We zien door (2.1) dat $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, dus ook dat $f([a_{n+1}, b_{n+1}]) = F(a_{n+1}) = F(b_{n+1}) = [a_n, b_n]$.

Nu we de inverse limiet hebben gedefinieerd hoeven we alleen nog te laten zien dat F een homeomorfisme is. Stel dat $x \neq y$. Dan weten we dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-y)3^n}{2} = \pm\infty$ en dus bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\left\lfloor \frac{(x-y)3^n}{2} \right\rfloor \geq 1$. Voor deze n zien we ook dat $\left\lfloor \frac{x3^n}{2} \right\rfloor \neq \left\lfloor \frac{y3^n}{2} \right\rfloor$ en dus geldt er dat $F(x) \neq F(y)$. We zien dus dat F injectief is. Om surjectiviteit te bewijzen nemen we $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$. We zien dan dat $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{3}|a_n - b_n|$ en dat $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Hieruit zien we dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$ voor een $x \in [0, 1]$. We zien dan dat $F_n(x) = [a_n, b_n]$.

Om te bewijzen dat F continu is hoeven we wegens lemma 2.6 alleen te bewijzen dat F_n continu is voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Voor een zekere $[a, b] \in X_n$ zien we dat $F_n^{-1}([a, b]) = [a, b] \cap C$. Omdat X_n eindig is, zien we nu dat een teruggehaald beeld van elke gesloten verzameling gesloten is en dus is F_n continu.

We weten dat de cantor verzameling een gesloten deelruimte is van $[0, 1]$, dus is het compact. In lemma 2.9 zullen we bewijzen dat alle pro-eindige verzamelingen Hausdorff zijn. Hieruit kunnen we concluderen dat F^{-1} ook continu moet zijn en daarom is F een homeomorfisme en de Cantor verzameling een pro-eindige verzameling.

2.2 Karakterisatie van Pro-eindige verzamelingen

We zullen nu bewijzen dat pro-eindige verzamelingen voldoen aan een aantal topologische eigenschappen. Het blijkt namelijk dat alle pro-eindige verzamelingen Hausdorff, compact, totaal onsamenvastend en metriseerbaar zijn. Omgekeerd geldt er ook dat alle ruimtes die Hausdorff, compact, totaal onsamenvastend en metriseerbaar zijn, pro-eindig zijn [5, 41:29-41:55]. Dit laatste zullen we hier niet bewijzen.

Lemma 2.9. *Pro-eindige verzamelingen zijn Hausdorff.*

Bewijs. Een discrete topologie is altijd Hausdorff. Een product van Hausdorff-ruimtes is opnieuw Hausdorff en een deelruimte van een Hausdorff-ruimte is ook Hausdorff. Een inversie limiet is altijd een deelruimte van een product van discrete topologieën en daarom is een inverse limiet altijd Hausdorff. Aangezien Hausdorff een topologische eigenschap is zijn pro-eindige verzamelingen ook Hausdorff. $\square$

Lemma 2.10. *Pro-eindige verzamelingen zijn compact.*

Bewijs. We zien dat

$$\begin{aligned} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n &= \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid f_n(x_{n+1}) = x_n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid f_n(x_{n+1}) = x_n \right\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x_n \in X_n} \left(\prod_{i \in \{0, \dots, n-1\}} X_i \right) \times \{x_n\} \times f_n^{-1}(\{x_n\}) \times \left(\prod_{i \in \{n+1, n+2, \dots\}} X_i \right) \end{aligned}$$

We zien dat

$$\left(\prod_{i \in \{0, \dots, n-1\}} X_i \right) \times \{x_n\} \times f_n^{-1}(\{x_n\}) \times \left(\prod_{i \in \mathbb{N}_{>n+1}} X_i \right)$$

gesloten is voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $x_n \in X_n$. Aangezien X_n eindig is voor alle $n \in \mathbb{N}$ zien we dat $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ook gesloten is.

We weten dat eindige discrete topologieën altijd compact zijn. Door de stelling van tychonov is het product van eindige discrete topologieën ook compact. Aangezien $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ een gesloten deelruimte is van een product van eindige discrete topologieën is $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ook compact. Aangezien compactheid een topologische eigenschap is betekent dit dat alle pro-eindige verzamelingen compact zijn. $\square$

Definitie 2.11 (Totaal onsamenvangende ruimte). Een ruimte is totaal onsamenvangend als de enige samenvangende componenten singletons zijn.

Lemma 2.12. *Pro-eindige verzamelingen zijn totaal onsamenvangend.*

Bewijs. De discrete topologie is totaal onsamenvangend. Aangezien producten en deelruimtes van totaal onsamenvangende ruimtes opnieuw onsamenvangend zijn, zien we dat de inverse limiet totaal onsamenvangend is. Aangezien totaal onsamenvangendheid een topologische eigenschap is zien we dat alle pro-eindige topologieën totaal onsamenvangend zijn. $\square$

Propositie 2.13. *Pro-eindige verzamelingen zijn metriseerbaar.*

Bewijs. We weten dat discrete topologieën metriseerbaar zijn. Door stelling 1.11 weten we dan dat een aftelbaar product van discrete topologieën metriseerbaar is. Aangezien een deelruimte van een metrische ruimte weer metriseerbaar is, weten we dat een invers limiet van discrete topologieën metriseerbaar is. Aangezien metriseerbaarheid een topologische eigenschap is zien we dat alle pro-eindige verzamelingen metriseerbaar zijn. $\square$

Hoofdstuk 3

Gecondenseerde verzamelingen

Dit hoofdstuk gaat over gecondenseerde verzamelingen. Er moet wel opgemerkt worden dat wat wij beschouwen als een gecondenseerde verzameling, doorgaands een lichte gecondenseerde verzameling genoemd wordt (zie opmerking 3.2). We kunnen een gecondenseerde verzameling beschouwen als een functor die een pro-eindige verzameling stuurt naar een verzameling van afbeeldingen S naar X . Gecondenseerde verzamelingen geven ons een manier om topologieën te vervangen. Het is namelijk mogelijk om vanuit een topologie een gecondenseerde verzameling te creëren. Dit noemen we het gecondenseerde analagon. Het is ook mogelijk om vanuit een gecondenseerde verzameling een topologie te creëren en dit zullen we een topologische benadering noemen.

In sectie 1 zullen we de formele definitie van een gecondenseerde verzameling geven, daarna zullen we kijken hoe dit rijmt met de informele uitspraak dat we $X(S)$ kunnen beschouwen als een collectie afbeeldingen tussen S en X . We zullen twee voorbeelden van gecondenseerde verzamelingen. Daarna zullen we het Yoneda lemma behandelen. Dit zal ons een formele manier geven hoe we $X(S)$ kunnen zien als een collectie afbeeldingen van S naar X .

In sectie 2 zullen we een functor definiëren van topologieën naar gecondenseerde verzamelingen. Deze functor noemen we de gecondenseerde analogonsfunctor. Deze functor maakt het mogelijk om interessantere voorbeelden te geven van gecondenseerde verzamelingen.

In sectie 3 zullen we een functor definiëren van gecondenseerde verzamelingen naar topologieën. Deze functor noemen we de topologische benaderingsfunctor. Het zal blijken dat deze functor de linksgeadjungeerde is van de gecondenseerde analogonsfunctor.

In sectie 4 zullen we kijken hoe goed de topologische benadering van een gecondenseerde analagon van een topologie de topologie benadert. Het zal blijken dat deze benadering goed gaat dan en slechts dan als de topologie sequentieel is. Dit resultaat zal ons helpen te bewijzen dat de gecondenseerde analogonsfunctor fully faithful is als we alleen kijken naar sequentiele topologieën. Het zal ons zelfs lukken om een nog sterkere uitspraak te bewijzen. Namelijk dat de gecondenseerde analogon functor “alleen maar” fully faithful is als we kijken sequentiele topologieën.

Dit hele hoofdstuk is gebaseerd op de video's [5] en het dictaat [7] van Peter Scholze. Een verschil is wel dat wij veel meer uitspraken zullen bewijzen. Dit is dan eigen werk. Wat ook eigen werk is, is de uitspraak dat de gecondenseerde analogonsfunctor alleen fully faithful is op sequentiele topologieën. Peter Scholze daarentegen zei alleen dat de gecondenseerde analogonsfunctor fully faithful is op sequentiele topologieën en deed verder geen uitspraken over hoe de functor zich gedroeg wanneer de topologieën niet sequentieel waren.

3.1 Definitie, voorbeelden en Yoneda

Definitie 3.1. Een **gecondenseerde verzameling** is een functor

$$X : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}.$$

De functor X moet voldoen aan de volgende eigenschappen:

- (i) Een gecondenseerde verzamelingen stuurt de lege verzamelingen naar een singleton:

$$X(\emptyset) = \{*\}.$$

- (ii) Definieer de functoren

$$F, G : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \times \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

waarbij

$$F(S_1, S_2) = X(S_1 \sqcup S_2) \text{ en } G(S_1, S_2) = X(S_1) \times X(S_2).$$

Dan moet er gelden dat $\eta : F \rightarrow G$ gedefinieerd als $\eta_{(S_1, S_2)} := (X(\iota_1), X(\iota_2))$, waarbij ι_1 en ι_2 de inclusie zijn van respectievelijk $S_1 \rightarrow S_1 \sqcup S_2$ en $S_2 \rightarrow S_1 \sqcup S_2$ een isomorfisme is.

- (iii) Voor een willekeurige surjectie $f : T \rightarrow S$ geldt dat

$$X(S) \xrightarrow{X(f)} X(T) \begin{matrix} \xrightarrow{X(\pi_1)} \\ \xrightarrow{X(\pi_2)} \end{matrix} X(T \times_S T)$$

een equalizer is. Aangezien T en S topologische ruimtes zijn kunnen we zeggen dat

$$T \times_S T = \{(t_1, t_2) \in T \times T \mid f(t_1) = f(t_2)\}.$$

De categorie van gecondenseerde verzamelingen samen met de natuurlijke transformaties tussen gecondenseerde verzamelingen noteren we met Cond .

Opmerking 3.2. De definitie van een gecondenseerde verzameling die we hier geven is anders dan de gebruikelijke definitie van gecondenseerde verzamelingen. Wat wij hier duiden als een gecondenseerde verzameling wordt doorgaands een lichte gecondenseerde verzameling genoemd. Toch zullen wij deze verzamelingen aanduiden als gecondenseerde verzamelingen, aangezien we geen andere gecondenseerde verzamelingen tegen zullen komen.

Opmerking 3.3. Voor een gegeven gecondenseerde verzameling X en pro-eindige verzameling S , is het handig om naar $X(S)$ te kijken als een collectie afbeeldingen van S naar X . Merk op dat deze drie eigenschappen hiermee overeenkomen. Eigenschap (i) komt overeen met het feit dat er maar één afbeelding is van $\emptyset$ naar X . Eigenschap (ii) volgt uit het feit dat een afbeelding van $S_1 \sqcup S_2$ naar X equivalent is aan twee aparte afbeeldingen S_1 naar X en S_2 naar X . De derde eigenschap volgt uit het feit dat het hebben van een afbeelding van $T \times_S T$ naar X equivalent is aan het hebben van een afbeelding T naar X die gelijk is op de vezels van f .

Iedere gecondenseerde verzameling heeft ook een onderliggende verzameling.

Definitie 3.4 (De onderliggende verzameling). Voor een gecondenseerde verzameling X is de onderliggende verzameling $X(\{*\})$

Nu zullen we een voorbeeld geven van een gecondenseerde verzameling.

Voorbeeld 3.5. We definiëren de Singleton gecondenseerde verzameling $E : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ als $E(S) = \{*\}$ voor alle pro-eindige S . Dat E voldoet aan (i) volgt direct. Dat E voldoet aan (ii) volgt uit het feit dat $E(S_1 \sqcup S_2) = \{*\}$ en dat $E(S_1) \times E(S_2) = \{*\} \times \{*\} = \{*\}$ voor alle pro-eindige S_1, S_2 . Neem nu een willekeurige surjectie $f : T \rightarrow S$ tussen pro-eindige verzamelingen. We zien dat $E(T) = E(S) = E(T \times_S T) = \{*\}$ en dat $E(f) = E(\pi_1) = E(\pi_2) = \text{Id}$, dus hebben we een equalizer.

Dit voorbeeld is nog niet heel interessant. Dit komt omdat we nog niet het gereedschap hebben om echt interessante voorbeelden te kunnen geven.

3.1.1 Yoneda

Eerder hadden we gezegd dat we $X(S)$ kunnen zien als een collectie afbeeldingen van S naar X . Dankzij het Yoneda lemma kunnen we dit formaliseren. We zullen hier het Yoneda lemma herhalen. Het bewijs staat in [6, p. 57-59].

Propositie 3.6. [6, p. 57][Yoneda] *Zij $\mathcal{C}$ een lokaal-kleine categorie. Dan zijn de functors*

$$\begin{aligned} (F, A) &\mapsto F(A) & : \text{Set}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ (F, A) &\mapsto \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -), F) & : \text{Set}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \end{aligned}$$

isomorf.

Hieruit volgt direct wat we nodig hebben. We zullen hierbij de notatie gebruiken dat voor een continue verzameling A geldt dat

$$\underline{A} := \text{Hom}_{\text{Top}}(-, A).$$

Dat $\underline{A}$ daadwerkelijk een gecondenseerde verzameling is, zullen we in de volgende sectie bewijzen.

Gevolg 3.7. *Zij X een gecondenseerde verzameling en S een pro-eindige verzameling. Dan geldt er dat $X(S) \cong \text{Hom}(\underline{S}, X)$.*

Bewijs. We weten dat $X : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$, dus wegens Yoneda zien we dat

$$X(S) \cong \text{Hom}(\text{Hom}_{\text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}}}(S, -), X) = \text{Hom}(\text{Hom}_{\text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})}(-, S), X) = \text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{S}, X).$$

□

Nu we hebben laten zien dat $X(S) \cong \text{Hom}(\underline{S}, X)$, moeten we alleen nog bekijken wat $X(f)$ wordt voor een willekeurige $f : T \rightarrow S$.

Gevolg 3.8. *Zij X een gecondenseerde verzameling en $f : T \rightarrow S$ een morfisme tussen pro-eindige verzamelingen. Dan geldt er dat $X(f) \simeq (f_*)^*$.*

Bewijs. We zien door Yoneda dat

$$X(f) \simeq \text{Hom}(\text{Hom}_{\text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})}(-, f), X) = \text{Hom}(f_*, X) = (f_*)^*$$

□

We kunnen ook voor een morfisme $f : X \rightarrow Y$ tussen gecondenseerde verzamelingen zeggen wat f_S is voor een willekeurige pro-eindige S .

Gevolg 3.9. *Zij $f : X \rightarrow Y$ een morfisme tussen gecondenseerde verzamelingen, dan geldt er dat $f_S = f_*$.*

Bewijs. We zien door Yoneda dat voor een willekeurige pro-eindige S geldt dat

$$f_S = \text{Hom}(\text{Hom}_{\text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})}(-, S), f) = f_*.$$

□

3.2 De gecondenseerde analogonsfunctor

We zullen nu zien hoe we vanuit een topologie een gecondenseerde verzameling kunnen creëren. Stel dat A een topologische ruimte is. We zullen de gecondenseerde analagon van A noteren als $\underline{A}$. We zullen nu $\underline{A}(S)$ definiëren als de verzameling afbeeldingen van S naar A . Aangezien A en S topologische ruimtes zijn is het logisch om alleen naar de continue afbeeldingen te kijken.

Definitie 3.10. Voor twee topologische ruimten A en B definiëren we

$$\text{Cont}(A, B) := \text{Hom}_{\text{Top}}(A, B),$$

oftewel de verzameling van continue afbeeldingen tussen A en B .

Definitie 3.11. Voor een topologische ruimte A , definiëren we $\underline{A} = \text{Cont}(-, A)$. We zien dan dat $\underline{A}(f) = f^*$. We zullen nu bewijzen dat $\underline{A}$ een gecondenseerde verzameling is.

Stelling 3.12. Voor een topologische ruimte A is $\underline{A} : S \mapsto \text{Cont}(S, A)$, $f \mapsto f^*$ een gecondenseerde verzameling.

Bewijs. Zij A een topologische ruimte. We zien dat $\underline{A}(\emptyset) = \text{Cont}(\emptyset, A) = \{*\}$.

We zien ook dat de functoren

$$F, G : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \times \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

waarbij

$$F(S_1, S_2) = \text{Cont}(S_1 \sqcup S_2, A) \text{ en } G(S_1, S_2) = X(S_1) \times X(S_2)$$

isomorf zijn, aangezien we zien dat $((\iota_1)^*, (\iota_2)^*) : \underline{A}(S_1 \sqcup S_2) \rightarrow \underline{A}(S_1) \times \underline{A}(S_2)$ gelijk is aan $f \mapsto (f|_{S_1}, f|_{S_2})$ en dit is een bijectie.

Als laatste moeten we nog laten zien dat

$$\underline{A}(S) \xrightarrow{f^*} \underline{A}(T) \xrightarrow[\pi_2^*]{\pi_1^*} \underline{A}(T \times_S T)$$

een equalizer is. Hiervoor nemen we een willekeurige verzameling U met een afbeelding $m : U \rightarrow \underline{A}(T)$ die voldoet aan $\pi_1^* \circ m = \pi_2^* \circ m$. Er moet een unieke $h : U \rightarrow \underline{A}(S)$ bestaan die voldoet aan

$$h(u) \circ f = m \text{ voor alle } u \in U \quad (3.1)$$

We weten door stelling 2.10 en 2.9 dat S en T compact en Hausdorff zijn. Aangezien f surjectief is, is het een quotientafbeelding.

Bovendien, merken we op dat $T \times_S T = \{(t_1, t_2) \in T \times T \mid f(t_1) = f(t_2)\}$. Voor alle $t_1, t_2 \in T$ met $f(t_1) = f(t_2)$ zien we dus dat

$$m(u)(t_1) = (\pi_1^* \circ m)(u)(t_1, t_2) = (\pi_2^* \circ m)(u)(t_1, t_2) = m(u)(t_2).$$

Door de universele eigenschap van quotientafbeeldingen, bestaat er een unieke continue afbeelding $h(u) : S \rightarrow A$ die aan (3.1) voldoet. $\square$

Nu is het mogelijk om $\underline{A}$ te evalueren in verschillende pro-eindige verzamelingen die we al gezien hebben.

Voorbeeld 3.13. Bij het meest eenvoudige voorbeeld $\{*\}$ zien we dat $\underline{A}(\{*\}) = \text{Cont}(\{*\}, A) \cong A$.

Voorbeeld 3.14. Een interessanter voorbeeld is $\mathbb{N}^\infty$. We zien dat dat

$$\underline{A}(\mathbb{N}^\infty) = \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, A) = \{\text{Convergente rijen in } A \text{ met een limietpunt}\}.$$

We zien namelijk dat als $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \subset \text{Cont}(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ dat voor alle open omgevingen U van x_∞ er een N bestaat zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $x_n \in U$. Dit betekent in andere woorden dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naar x_∞ convergeert. We kunnen dus zeggen dat $\underline{A}(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ de verzameling is van alle convergerende rijen in A , samen met een limietpunt. De nadruk ligt hier op “een”, omdat in een niet-Hausdorff ruimte een rij meerdere limietpunten kan hebben. Het limietpunt wordt dus niet helemaal bepaald door de rij.

Het blijkt dat het voorbeeld die we in sectie 1 gezien hebben ook geconstrueerd kan worden uit een topologie. De singleteton gecondenseerde verzameling is namelijk gelijk aan $\{*\}$.

We zien nu dat alle voorbeelden van gecondenseerde verzamelingen die wij net gegeven hebben een geconjugeerd analagon zijn van een topologie. Nu is het een interessante vraag of het mogelijk is om iedere gecondenseerde verzameling te schrijven als een geconjugeerd analagon van een topologie. Dit blijkt niet zo te zijn. Stel namelijk dat $X = \underline{A}$ voor een topologische ruimte A . Dan zien we dat als $X(\{*\}) = \{*\}$, dat $A = \{*\}$, dus geldt er voor alle pro-eindige S dat $X(S) = \text{Cont}(S, \{*\}) = \{*\}$. Het is dus voldoende om te laten zien dat er een gecondenseerde verzameling X bestaat zodanig $X(\{*\}) = \{*\}$ en $X(S) \neq \{*\}$ voor een pro-eindige S .

Voorbeeld 3.15. We zullen nu een voorbeeld geven van een gecondenseerde verzameling dat niet gelijk is aan een geconstrueerd analagon van een topologie. We zullen hier $\mathbb{R}^{\text{Discr}}(S) = \text{Cont}(S, \mathbb{R}^{\text{Discr}})$ en $\mathbb{R}(S) = \text{Cont}(S, \mathbb{R})$ voor een willekeurige pro-eindige S beschouwen als abelse groepen. Merk op dat $\mathbb{R}^{\text{Discr}}$ een grotere topologie is dan $\mathbb{R}$, dus zien we dat $\text{Cont}(S, \mathbb{R}^{\text{Discr}}) \subset \text{Cont}(S, \mathbb{R})$. Dit betekent ook dat $\text{Cont}(S, \mathbb{R}^{\text{Discr}})$ een ondergroep is van $\text{Cont}(S, \mathbb{R})$. Dit maakt het mogelijk om de gecondenseerde verzameling X te definiëren als

$$X(S) := \mathbb{R}(S) / \mathbb{R}^{\text{Discr}}(S) = \text{Cont}(S, \mathbb{R}) / \text{Cont}(S, \mathbb{R}^{\text{Discr}}).$$

en

$$X(f) := [g] \mapsto [g \circ f]$$

voor een afbeelding $f : T \rightarrow S$ tussen pro-eindige verzamelingen. We zien dan dat $X(\{*\}) = \mathbb{R}(\{*\}) / \mathbb{R}^{\text{Discr}}(\{*\}) \cong \mathbb{R} / \mathbb{R} = \{*\}$. We weten dat een rij alleen convergeert in $\mathbb{R}^{\text{Discr}}$ als het op een gegeven moment constant wordt. We zien dus dat $\text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, \mathbb{R}^{\text{Discr}}) \neq \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, \mathbb{R})$ en daarom zien we dat

$$X(\mathbb{N}^\infty) = \mathbb{R}(\mathbb{N}^\infty) / \mathbb{R}^{\text{Discr}}(\mathbb{N}^\infty) \neq \{*\}$$

Hieruit volgt dat X onmogelijk gelijk kan zijn aan een gecondenseerd analagon van een topologie.

3.3 De topologische benaderingsfunctor

We zullen nu bewijzen dat de gecondenseerde analogonsfunctor een links geadjungeerde heeft. Hiervoor moeten we een functor construeren van Cond naar Top . We zagen in voorbeeld 3.13 dat $\underline{A}(\{*\}) = A$. Een goede kandidaat voor de linksgeadjungeerde is dus $X \mapsto X(\{*\})$. Het enige probleem is dat deze functor naar Set afbeeldt en geen informatie bevat over de topologie. We zullen dus een topologie moeten definiëren op $X(\{*\})$.

Definitie 3.16. We zullen nu de een functor $\bullet_{\text{Top}} : \text{Cond} \rightarrow \text{Top}$ definiëren. Voor een gecondenseerde verzameling X definiëren we X_{Top} als $X(\{*\})$ met de volgende quotienttopologie:

$$\bigsqcup_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty \xrightarrow{\beta_{\{*\}}} X(\{*\}).$$

We kunnen dit ook formuleren als de kleinste topologie zodanig dat $\beta_{\{*\}}$ voor alle $\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)$ continu is. Voor twee gecondenseerde verzamelingen X en Y en een natuurlijke transformatie $f : X \rightarrow Y$ definiëren we $f_{\text{Top}} = f_{\{*\}}$.

We moeten nu alleen nog wel bewijzen dat de topologische benaderingsfunctor goed gedefinieerd is.

Propositie 3.17. Voor $f \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(X, Y)$ geldt dat f_{Top} continu is.

Bewijs. Neem $f \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(X, Y)$. Door de universele eigenschap van de quotienttopologie is f_{Top} continu dan en slechts dan als $f \circ \bigsqcup \beta_{\{*\}}$ continu is. Als het ons lukt om een continue afbeelding

$$\nu : \bigsqcup_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty \rightarrow \bigsqcup_{\gamma \in Y(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty$$

te definiëren zodat

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty & \xrightarrow{\bigsqcup \beta_{\{*\}}} & X(\{*\}) \\ \downarrow \nu & & \downarrow f_{\text{Top}} \\ \bigsqcup_{\gamma \in Y(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty & \xrightarrow{\bigsqcup \gamma_{\{*\}}} & Y(\{*\}) \end{array}$$

commuteert, dan zien we dat f_{Top} continu is. Om de notatie makkelijker te maken zullen we de componenten van $\bigsqcup_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty$ en $\bigsqcup_{\gamma \in Y(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty$ respectievelijk indexeren als $\left(\left\{ \mathbb{N}_\beta^\infty \right\}_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \right)$ en $\left(\left\{ \mathbb{N}_\gamma^\infty \right\}_{\gamma \in Y(\mathbb{N}^\infty)} \right)$. Merk op dat $f \circ \beta \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(\mathbb{N}^\infty, Y)$. Dus kunnen we ν definëren als

$$\nu|_{\mathbb{N}_\beta^\infty}(n) = n \in \mathbb{N}_{f \circ \beta}^\infty.$$

Om te laten zien dat ν continu is, is het voldoende om te laten zien dat $\nu|_{\mathbb{N}_\beta^\infty}$ continu is voor alle $\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)$. We zien dat voor een open $U \in \bigsqcup_{\gamma \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty$ geldt dat $\nu|_{\mathbb{N}_\beta^\infty}^{-1}(U) = \mathbb{N}_{f \circ \beta}^\infty \cap U \subset \mathbb{N}_\beta^\infty$. Daarnaast zien we dat

$$\begin{aligned} \left(\bigsqcup \gamma_{\{*\}} \circ \nu \right)|_{\mathbb{N}_\beta^\infty} &= \bigsqcup \gamma_{\{*\}} \circ \nu|_{\mathbb{N}_\beta^\infty} &&= \bigsqcup \gamma_{\{*\}} \circ (\mathbb{N}_\beta^\infty \ni n \mapsto n \in \mathbb{N}_{f \circ \beta}^\infty) \\ &= (f \circ \beta)_{\{*\}} &&= (f_{\{*\}} \circ \beta_{\{*\}}) \\ &= (f_{\text{Top}} \circ \beta_{\{*\}}) &&= (f_{\text{Top}} \circ \bigsqcup \beta_{\{*\}})|_{\mathbb{N}_\beta^\infty} \end{aligned}$$

dus zien we dat $\bigsqcup \gamma_{\{*\}} \circ \nu = f_{\text{Top}} \circ \bigsqcup \beta_{\{*\}}$ en dus is f_{Top} continu. $\square$

Het zal nu blijken dat de topologische benaderingsfunctor een linksgeadjungeerde is van de gecondenseerde analogonsfunctor.

Stelling 3.18. *De functor*

$$X \mapsto X(*)_{\text{top}}$$

is een linkse adjunctie van $A \mapsto \underline{A}$

Bewijs. Hiervoor definiëren we de isomorfisme

$$\alpha : \text{Hom}_{\text{Cond}}(-, \underline{}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Top}}(-_{\text{top}}, -)$$

als

$$\alpha_{X,Y}(f) = f_{\{*\}}.$$

Continuïteit van $\alpha_{X,Y}(f)$: Als eerste zullen we bewijzen dat $f_{\{*\}}$ continu is voor alle $f \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(-, \underline{})$.

Door de universele eigenschap van de quotient topologie is het voldoende om te bewijzen dat $f_{\{*\}} \circ \left(\bigsqcup_{\beta \in X(S)} \beta_{\{*\}} \right)$ continu is. Door de universele eigenschap van het co-product is het voldoende om te bewijzen dat $f_{\{*\}} \circ \beta_{\{*\}}$ continu is voor alle $\beta \in X(S)$. Door 3.7 zien we dat

$$\text{Cont}(S, Y) = \underline{Y}(S) = \text{Hom}(\underline{S}, \underline{Y})$$

. We zien dat $f \circ \beta \in \text{Hom}(\underline{S}, \underline{Y})$, dus we zien dat $f_{\{*\}} \circ \beta_{\{*\}} \in \text{Cont}(\underline{S}, \underline{Y})$. Hierdoor zien we dat $f_{\{*\}}$ continu is.

α is een natuurlijke transformatie: Om te bewijzen dat α natuurlijke transformatie is, moeten we aantonen dat de volgende diagram commuteert voor alle $f : X_1 \rightarrow X_2$ en $g : Y_1 \rightarrow Y_2$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}}(X_1, \underline{Y_1}) & \xrightarrow{\alpha_{X_1, Y_1}} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X_1(*), Y_1) \\
\uparrow - \circ f & & \uparrow - \circ f_{\{*\}} \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}}(X_2, \underline{Y_1}) & \xrightarrow{\alpha_{X_2, Y_1}} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X_2(*), Y_1) \\
\downarrow g_* \circ - & & \downarrow g \circ - \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}}(X_2, \underline{Y_2}) & \xrightarrow{\alpha_{X_2, Y_2}} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X_2(*), Y_2)
\end{array} \quad (3.2)$$

Zij $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}}(X_2, \underline{Y_1})$, dan moeten we bewijzen dat

$$h_{\{*\}} \circ f_{\{*\}} = (h \circ f)_{\{*\}} \quad (3.3)$$

en dat

$$g \circ h_{\{*\}} = (g_* \circ h)_{\{*\}}. \quad (3.4)$$

Hierbij is (3.3) per definitie waar en (3.4) volgt uit het feit dat

$$(g_*)_{\{*\}} = (* \mapsto y_1) \mapsto (* \mapsto g(y_1)) \simeq y_1 \mapsto g(y_1) = g.$$

Bijektiviteit van α : Om te bewijzen dat α bijectief is, moeten we bewijzen dat $\alpha_{X,Y}$ bijectief is voor alle X, Y . We definiëren $\alpha_{X,Y}$, waarbij S een pro-eindige verzameling is, $\beta \in X(S)$ en $s \in S$ als volgt:

$$\alpha_{X,Y}^{-1}(f)_S(\beta)(s) := f \circ X(* \mapsto s)(\beta).$$

Nu zullen we aantonen dat $\alpha_{X,Y}^{-1}$ daadwerkelijk de inverse is van $\alpha_{X,Y}$. We zien dat

$$\left(\alpha_{X,Y} \circ \alpha_{X,Y}^{-1} \right) (g)(\beta) = \alpha_{X,Y}^{-1}(g)_{\{*\}}(\beta) = *' \mapsto g \circ X(* \mapsto *')(\beta) \simeq g \circ X(\mathrm{Id}_{\{*\}})(\beta) \quad (3.5)$$

$$= g \circ \mathrm{Id}_{X(\{*\})}(\beta) = g(\beta). \quad (3.6)$$

De omgekeerde richting is wat lastiger te bewijzen. Aangezien voor $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}}(X, \underline{Y})$ geldt dat f een morfisme is tussen functoren, dus voldoet het aan commutatiediaagram (3.1).

$$f_S(\beta)(s) \simeq f_S(\beta) \circ (* \mapsto s) = (f_{\{*\}} \circ X(* \mapsto s))(\beta) = (\alpha_{X,Y}^{-1} \circ \alpha_{X,Y})(f)_S(\beta)(s)$$

□

3.4 Sequentiele ruimtes

Definitie 3.19. Zij X een topologische ruimte en $A \subset X$. Dan is A **sequentieel gesloten** dan en slechts als voor elke convergerende rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ geldt dat alle limietpunten zich in A bevinden.

Hieruit is het mogelijk om de topologische eigenschap van een sequentiele ruimte te definiëren.

Definitie 3.20. [8] Een topologische ruimte X is **sequentieel** als voor alle $A \subset X$ geldt dat A gesloten is dan en slechts dan als A sequentieel gesloten is.

Het is ook mogelijk om een willekeurige topologische ruimte sequentieel te maken door alle sequentieel gesloten verzamelingen gesloten te maken.

Definitie 3.21. Voor een topologische ruimte X definiëren we de **sequentialisatie** x^{Seq} , waarbij $A \subset x^{\text{Seq}}$ gesloten is dan en slechts dan als A sequentieel gesloten is in X .

We zullen nu zien dat dit een nieuwe topologie oplevert.

Propositie 3.22. *De sequentialisatie van een willekeurige topologische ruimte X is een goed gedefinieerde topologie.*

Bewijs. Zij X een topologische ruimte. We laten zien dat X^{Seq} ook een topologische ruimte is.

- (i) Dat $\emptyset$ en X sequentieel gesloten zijn is triviaal.
- (ii) Stel nu dat $(A_i)_{i \in I} \subset X$ een collectie sequentieel gesloten verzamelingen zijn. Neem nu een convergerende rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Aangezien A_i voor alle $i \in I$ sequentieel gesloten is zien we dat het alle limietpunten van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bevat. Dus zien we dat $\bigcap_{i \in I} A_i$ alle limietpunten van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bevat en daardoor zien we dat $\bigcap_{i \in I} A_i$ sequentieel gesloten is.
- (iii) Zij nu A_1 en A_2 twee sequentieel gesloten verzamelingen. Stel nu dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_1 \cup A_2$. We weten zonder verlies van algemeenheid dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een deelrij $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in A_1$ heeft. Aangezien A_1 sequentieel gesloten is en omdat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dezelfde limietpunten hebben zien we dat alle limietpunten bevat zijn in A_1 en dus ook in $A_1 \cup A_2$. We kunnen dus concluderen dat $A_1 \cup A_2$ sequentieel gesloten is.

□

Uit de topologie weten we dat elke gesloten verzameling sequentieel gesloten is. Ook is het zo dat in eerst-aftelbare ruimtes een sequentieel gesloten verzameling altijd gesloten is. Hieruit volgt dat alle eerst-aftelbare ruimtes sequentiele ruimtes zijn. Een voorbeeld van een ruimte dat niet sequentieel is, is de co-aftelbare verzameling. Dit zou betekenen dat de co-aftelbare verzameling sequentieel gesloten verzamelingen bevat die niet gesloten zijn. Sterker nog, we zullen zien dat in de co-aftelbare ruimte alle verzamelingen sequentieel gesloten zijn.

Voorbeeld 3.23. Zij X een verzameling met de co-aftelbare topologie. Dan geldt voor alle $A \subset X$ dat A sequentieel gesloten is.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ een convergente rij en x zijn limiet. We zien dat $X \setminus \{x_n | x_n \neq x, n \in \mathbb{N}\}$ een open omgeving is van x . Dus bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n' \geq N$ geldt dat $x_n \in X \setminus \{x_n | x_n \neq x, n \in \mathbb{N}\}$, oftewel dat $x_{n'} = x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ waarbij $x_n \neq x$. Dus moet er gelden dat $x = x_{n'}$ voor alle $n \geq N$. We zien nu dus dat $x \in A$. □

Sequentiele topologieën zijn belangrijk wanneer we praten over gecondenseerde verzamelingen die geïnduceerd zijn door topologieën. Het blijkt namelijk zo te zijn dat $\underline{A}_{\text{Top}}$ gelijk is aan A in Top dan en slechts dan als A sequentieel is. Het is ook mogelijk om nog een sterkere uitspraak te geven. Het blijkt namelijk zo te zijn dat $\underline{A}_{\text{Top}}$ gelijk is aan de topologie van sequentiele gesloten verzamelingen van A , oftewel $\underline{A}_{\text{Top}} = A^{\text{Seq}}$.

Stelling 3.24. *Zij A een topologische ruimte. Dan geldt er dat $\underline{A}_{\text{Top}} = A^{\text{Seq}}$.*

Voordat we dit kunnen bewijzen moeten we eerst wat lemma's bewijzen.

Lemma 3.25. *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. $B \subset A$ is sequentieel gesloten.
2. Voor iedere continue afbeelding $f : \mathbb{N}^\infty \rightarrow A$ geldt dat $f^{-1}(B)$ gesloten is.

Bewijs.

(1) $\implies$ (2) Stel dat $B \subset A$ sequentieel gesloten is en zij $f : \mathbb{N}^\infty \rightarrow A$ continu. Zeggen dat $f : \mathbb{N}^\infty \rightarrow A$ continu is, is equivalent aan zeggen dat $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert naar $f(\infty)$. Nu kijken we naar twee gevallen:

$f(\infty) \in B$ Stel eerst dat $f(\infty) \in B$. Dan zien we dat dat $\infty \in f^{-1}(B)$ en dus geldt er dat het complement van $f^{-1}(B)$ alleen bestaat uit elementen van $\mathbb{N}$, dus is het complement open en $f^{-1}(B)$ dus gesloten

$f(\infty) \notin B$ Stel nu dat $f(\infty) \notin B$. Stel nu dat $f^{-1}(B)$ oneindig veel elementen heeft. Dan zou dit betekenen dat $(f(n))_{n \in f^{-1}(B)}$ een rij is die volledig in B bevat is. Aangezien B sequentieel gesloten is mag $(f(n))_{n \in f^{-1}(B)}$ niet naar een element buiten B convergeren. Dit is een tegenspraak met dat $f(\infty) \notin B$ limiet is van $(f(n))_{n \in f^{-1}(B)}$. Dit betekent dat $f^{-1}(B) \subset \mathbb{N}$ eindig is en dus gesloten.

$\neg(1) \implies \neg(2)$ Stel nu dat $B \subset A$ niet sequentieel gesloten is. Dit betekent dat er een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ bestaat waarbij $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A \setminus B$. Definieer nu $f : \mathbb{N}^\infty \rightarrow A$ als $f(n) = x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Aangezien $(f(n))_n \in \mathbb{N}$ naar $f(\infty)$ convergeert zien we dat f continu is. Tegelijkertijd zien we dat $f^{-1}(B) = \mathbb{N}$ en dus is $f^{-1}(B)$ niet gesloten.

□

Nu kunnen we stelling 3.24 gaan bewijzen

Bewijs van stelling 3.24. Aangezien $\underline{A}_{\text{Top}}$ de volgende quotiënt topologie heeft:

$$\bigsqcup_{f \in \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, A)} \mathbb{N}^\infty \xrightarrow{f} A$$

is zeggen dat $B \subset \underline{A}_{\text{Top}}$ gesloten is equivalent aan zeggen dat $\left(\bigsqcup_{f \in \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, A)} f \right)^{-1}(B)$ gesloten is. Dit is weer equivalent aan zeggen dat $f^{-1}(B)$ gesloten is voor alle $f \in \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, A)$. Wegens lemma 3.25 is dit equivalent met zeggen dat $B \subset A$ sequentieel gesloten is. We zien dat de gesloten verzamelingen overeenkomen met de sequentieel gesloten verzamelingen, dus kunnen we zeggen dat $\underline{A}_{\text{Top}} = A^{\text{Seq}}$. □

Gevolg 3.26. Zij A een topologische ruimte. Dan geldt er dat $\underline{A}_{\text{Top}} = A$ dan en slechts dan als A een sequentiele ruimte is.

Bewijs. Zeggen dat $\underline{A}_{\text{Top}} = A$ is equivalent aan zeggen dat $A^{\text{Seq}} = A$. Dit is weer equivalent aan dat A een sequentiele ruimte is. □

Voorbeeld 3.27. Voor elke verzameling X noteren we X^{cc} als X met de co-aftelbare topologie en X^{Dis} als X met de discrete topologie. Er geldt dan dat

$$\underline{X^{\text{cc}}}_{\text{Top}} = X^{\text{Dis}}.$$

Bewijs. Wegens stelling 3.24 geldt er dat $B \subset \underline{X^{\text{cc}}}_{\text{Top}}$ gesloten is dan en slechts dan als B sequentieel gesloten is in X^{cc} . Wegens propositie weten we dat alle verzamelingen in X^{cc} sequentieel gesloten zijn, dus geldt er dat $\underline{X^{\text{cc}}}_{\text{Top}} = X^{\text{Dis}}$. □

Als we nu Seq definiëren als de volle deelcategorie van Top van alle sequentie ruimten. Dan geldt er dat de restrictie van de gecondenseerde analagon functor op Seq fully faithful is. Om dit te bewijzen zullen we de volgende uitspraak bewijzen:

Vanuit hier kunnen we het volgende bewijzen:

Gevolg 3.28. De volgende twee uitspraken zijn equivalent voor alle topologische ruimten X :

(i) Voor alle topologische ruimten Y geldt dat de volgende afbeelding een isomorfisme is:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y}) \\ f &\mapsto f_*. \end{aligned}$$

(ii) X is een sequentiele ruimte

Bewijs. Door stelling 3.18 weten we dat $\text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y})$ isomorf is aan $\text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{X}_{\text{Top}}, Y)$. Door gevolg 3.26 weten we dat $\text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{X}_{\text{Top}}, Y)$ isomorf is aan $\text{Hom}_{\text{Top}}(X^{\text{Seq}}, Y)$. We krijgen nu het volgende commutatiediaagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) & \xrightarrow{f \mapsto f_*} & \text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y}) \\ & \searrow \iota & \downarrow \alpha_{\underline{X}, Y} \\ & & \text{Hom}_{\text{Top}}(X^{\text{Seq}}, Y) \end{array}$$

Merk op dat aangezien $\alpha_{\underline{X}, Y}$ bijectief is, het voldoende is om te laten zien dat ι bijectief is. We zullen nu laten zien dat ι de inclusie is. We zien namelijk dat

$$\iota(f)(x) \cong \alpha_{\underline{X}, Y}(f_*)(* \mapsto x) = f \circ (* \mapsto x) = * \mapsto f(x) \cong f(x),$$

dus is ι inderdaad de inclusie. Nu zullen we laten zien dat uitspraken (i) en (ii) equivalent zijn aan elkaar:

- (i) $\implies$ (ii) Stel dat $f \mapsto f_* : \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y})$ bijectief is voor alle topologische ruimte Y . Dan weten we dat ι ook bijectief is. Kies nu $Y = X^{\text{Seq}}$. We weten dat $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X^{\text{Seq}}, X^{\text{Seq}})$. Aangezien ι bijectief is zien we dat $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, X^{\text{Seq}})$, dus moet X sequentieel zijn.
- (ii) $\implies$ (i) Stel nu dat X sequentieel is, oftewel dat $X = X^{\text{Seq}}$. We zien dan dat voor willekeurige Y geldt dat de inclusie $\iota = \text{Id}_{\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)}$ en dus is ι een isomorfisme, waaruit volgt dat $f \mapsto f_*$ ook een isomorfisme is.

□