

Hoofdstuk 1

De Producttopologie

1.1 Eindige producten

Voordat we kunnen kijken naar een algemene vorm van de producttopologie is het eerst handig om te herhalen wat de producttopologie is voor eindige producten. We zullen deze topologie definiëren en wat eigenschappen dat het aan voldoet benoemen. Sommige hiervan zullen we ook bewijzen.

De producttopologie is als volgt gedefinieerd .

Definitie 1.1. Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ twee topologische ruimten. Het product van $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ is gedefinieerd als $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ waarbij

$$\mathcal{T}_{X \times Y} := \langle U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \rangle.$$

In woorden is de producttopologie de kleinste topologie zodat het cartesisch product van opens in X met opens in Y open zijn in $X \times Y$. We kunnen nu ook twee afbeeldingen $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ en $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ definiëren als $\pi_1(x, y) = x$ en $\pi_2(x, y) = y$. Zulke functies worden vaak projecties genoemd. Het blijkt dat we de producttopologie ook kunnen definiëren in termen van deze projectie functies.

Lemma 1.2. Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ twee topologische ruimten. Dan is het product $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ de kleinste topologie zodat $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ en $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ continu zijn.

Bewijs. Stel dat $\mathcal{T}'_{X \times Y}$ de kleinste topologie is zodat π_1 en π_2 continu zijn. Stel dat $U \in \mathcal{T}_X$ en $V \in \mathcal{T}_Y$ dan geldt er dat $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$. Aangezien π_1 en π_2 continu zijn geldt er dat $U \times V \in \mathcal{T}'_{X \times Y}$. Omdat $\mathcal{T}_{X \times Y}$ de kleinste topologie is zodanig dat $U \times V$ open is voor alle U en V zien we dat $\mathcal{T}_{X \times Y} \subset \mathcal{T}'_{X \times Y}$. We zien voor alle $U \in \mathcal{T}_X$ dat $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y}$ en voor alle $V \in \mathcal{T}_Y$ dat $\pi_2^{-1}(V) = X \times V \in \mathcal{T}_{X \times Y}$, dus π_1 en π_2 zijn continu onder de topologie van $\mathcal{T}_{X \times Y}$. Hieruit volgt dat $\mathcal{T}'_{X \times Y} \subset \mathcal{T}_{X \times Y}$. We concluderen dat $\mathcal{T}_{X \times Y} = \mathcal{T}'_{X \times Y}$. $\square$

Opmerking 1.3. Wanneer we kijken naar oneindige producten zullen we zien dat lemma 1.2 niet waar is. Dit zal er toe leiden dat we verschillende topologieën kunnen definiëren op het cartesisch product.

De topologie die we net gedefinieerd hebben is een erg “handige” definitie, aangezien het veel van de eigenschappen van X en Y behoudt. Stel bijvoorbeeld dat X en Y Hausdorff zijn, dan is $X \times Y$ dat ook. Hetzelfde geldt voor eerst-aftelbaarheid, twee-aftelbaarheid, metriseerbaarheid en compactheid.

1.2 Doostopologie

We zullen nu een eerste poging doen om de definitie van de producttopologie die we in sectie 1.1 hebben gezien uit te breiden naar oneindige producten. Hierbij hebben we een collectie $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$ van topologieën.

Het cartesisch product is gedefinieerd als

$$\prod_{i \in I} X_i := \{x : I \rightarrow \sqcup_{i \in I} X_i \text{ waarbij } x_i \in X_i \text{ voor alle } i \in I\}.$$

Nu kunnen we een topologie definiëren op deze verzameling.

Definitie 1.4. Zij $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$ een collectie topologieën. Dan definiëren we de **doostopologie** als $(X, \mathcal{T}_X)$, waarbij $X = \prod_{i \in I} X_i$ en

$$\mathcal{T}_X := \left\langle \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_{X_i} \text{ voor alle } i \in I \right\rangle.$$

Merk op dat deze definitie precies hetzelfde is als definitie 1.1, behalve dat we nu gebruikmaken van arbitraire producten. Het is daarom wellicht opvallend dat we deze topologie een doostopologie noemen in plaats van de producttopologie. Dit komt omdat hoewel de definities heel erg op elkaar lijken, de eigenschappen tamelijk van elkaar verschillen. We zeiden aan het eind van sectie 1.1 dat de producttopologie “handig” was, aangezien het veel eigenschappen behoudt. Dit ligt bij de doostopologie heel erg anders en daarom heeft het een andere benaming.

Voorbeeld 1.5 (Componentsgewijze continuïteit). Als voorbeeld zullen we nu een functie definiëren waarbij alle componenten continu zijn. In de producttopologie weten we dat dit betekent dat de functie zelf ook continu is. Alleen zullen we nu laten zien dat in de doos topologie dit niet noodzakelijkerwijs het geval is. Definieer

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \quad f_i(x) = x \text{ voor alle } i \in \mathbb{N}.$$

Merk op dat f_i voor alle $i \in \mathbb{N}$ de identiteit is, dus zijn alle componenten continu. We zien dat $\prod_{n \in \mathbb{N}} (-2^{-n}, 2^{-n})$ open is in de doostopologie. Merk op dat

$$f^{-1} \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} (-2^{-n}, 2^{-n}) \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-2^{-n}, 2^{-n}) = \{0\},$$

en dus is f niet continu.

Voorbeeld 1.6 (Compactheid). Nog een eigenschap dat niet behouden blijft is compactheid. De eenvoudigste manier om dit te zien is door X te kiezen als een eindige verzameling met meer dan één element. Als we op X de discrete topologie nemen weten we dat X compact is. Als we nu de doostopologie nemen op $\prod_{n \in \mathbb{N}} X$ krijgen we opnieuw de discrete topologie, maar nu is $\prod_{n \in \mathbb{N}} X$ niet eindig, dus is het niet compact.

1.3 Producttopologie

Zoals in opmerking 1.3 gezegd werd geldt lemma 1.2 niet met oneindige producten. Dit zal ons de mogelijkheid geven om een andere topologie te definiëren op het oneindig cartesisch product. We kunnen net als bij eindige producten een projectie functie π_i voor alle $i \in I$ definiëren als

$$\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i \quad \pi_i(x) = x_i.$$

Dan definiëren we de producttopologie als volgt:

Definitie 1.7. Zij $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$ een collectie topologieën. Dan definiëren we de **producttopologie** als $(X, \mathcal{T}_X)$ waarbij $X = \prod_{i \in I} X_i$ en $\mathcal{T}_X$ de kleinste topologie is zodanig dat π_i continu is voor alle $i \in I$.

In sectie 1.1 konden we nog zeggen dat deze definitie equivalent is aan de doostopologie. Dit bewezen we in lemma 1.2 door te argumenteren dat $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$. Dit argument kunnen we nu niet meer maken helaas, aangezien we nu zouden krijgen dat $\prod_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i)$. Merk op dat we nu een oneindige doorsnede nemen van verzamelingen in de producttopologie. Aangezien oneindige doorsnedes van opens niet noodzakelijk open zijn hebben we geen garantie dat $\prod_{i \in I} U_i$ open is in de producttopologie.

Nu zullen we een basis vinden van deze topologie. Hierdoor zal het makkelijker zijn om het verschil te zien tussen de Producttopologie en de Doos topologie.

Lemma 1.8. *De producttopologie heeft de volgende basis:*

$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_j \in \mathcal{T}_{X_j} \text{ voor alle } j \in J, U_j = X_j \text{ voor alle } i \in I \setminus J \mid \text{een eindige } J \subset I \right\}. \quad (1.1)$$

In woorden is deze basis alle producten van opens uit X_i voor alle i waarbij maar een eindige hoeveelheid van die opens ongelijk is aan X_i .

Bewijs. Stel dat U element is van (1.1). Dan weten we dat er een eindige J is zodanig dat $U_j \in \mathcal{T}_{X_j}$ voor alle $j \in J$ en $U_i = X_i$ voor alle $i \in I \setminus J$. We zien dan dat $U = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j)$. Per definitie zijn π_j voor alle $j \in J$ continu en aangezien J eindig is, is U open. We zien dus dat de topologie gegenereerd door (1.1) kleiner of gelijk is aan de producttopologie.

Voor alle $j \in I$ en $U_j \in \mathcal{T}_{X_j}$ geldt er dat $\pi_j^{-1}(U_j) = \prod_{i \in I} U_i$ waarbij $J = \{j\}$ en $U_i = X_i$ voor alle $i \neq j$. Dus zien we dat π_i continu is in de topologie gegenereerd door (1.1). Aangezien de producttopologie de kleinste topologie is zodanig dat π_i voor alle $i \in I$ continu zijn is de producttopologie kleiner of gelijk aan de topologie gegenereerd door (1.1).

We concluderen dat de twee topologieën gelijk zijn. □

Opmerking 1.9. Door lemma 1.8 zien we dat voor een open U in $\prod_{i \in I} X_i$ geldt dat er een eindige $J \subset I$ bestaat zodat $\pi_i(U) = X_i$ voor alle $i \in I \setminus J$. Een gevolg hiervan is dat het product van discrete topologieën niet altijd een discrete topologie is.

We zullen nu zien dat de producttopologie “handiger” is dan de doostopologie. Bij de doostopologie hadden we bijvoorbeeld het probleem dat componentsgewijze continuïteit geen continuïteit impliceert (zie voorbeeld 1.5) en dat compactheid niet behouden blijft (zie voorbeeld 1.6). Bij de Producttopologie is dit anders. We zullen nu bewijzen dat componentsgewijze continuïteit wel continuïteit impliceert en in sectie 1.4 zullen we zien dat compactheid ook behouden blijft.

Lemma 1.10. *Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte en $\{(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})\}_{i \in I}$ een collectie topologische ruimtes. Als $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ componentsgewijs continu is, dus $\pi_i \circ f$ is continu voor alle $i \in I$, dan is f ook continu als $\prod_{i \in I} Y_i$ de product topologie heeft.*

Bewijs. Zij U een open in $\prod_{i \in I} Y_i$. Dan kunnen we wegens lemma 1.8 zonder verlies van algemeenheid zeggen dat $U = \prod_{i \in I} U_i$ waarbij er een eindige $J \subset I$ zodat U_j open is in Y_j voor alle $j \in J$ en $U_i = Y_i$ voor alle $i \in I \setminus J$. Dit betekent ook dat $(\pi_i \circ f)^{-1}(U_i) = X$ voor alle $i \in I \setminus J$. We zien dan dat

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\prod_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} (\pi_i \circ f)^{-1}(U_i) = \bigcap_{j \in J} (\pi_j \circ f)^{-1}(U_j) \quad (1.2)$$

Omdat U_j open is en $\pi_j \circ f$ continu is zien we dat $(\pi_j \circ f)^{-1}(U_j)$ open is voor alle $j \in J$. Om J een eindige verzameling is, concluderen we dat $f^{-1}(U)$ open is. □

1.3.1 Aftelbare producten

We zagen net dat producten een handige definitie is omdat veel eigenschappen behouden blijven. Als we nu kijken naar producten van de vorm

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

dan zal het mogelijk zijn om nog meer eigenschappen te bewijzen. We zullen zien dat een aftelbaar product van metriseerbare ruimtes metriseerbaar is en dat een aftelbaarheid product van rijcompacte ruimtes rijcompact is.

Stelling 1.11. *Zij $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een aftelbare collectie van metriseerbare ruimtes, dan is $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ook metriseerbaar.*

Bewijs. We zullen gegeven een metriek op d_n op X_n voor alle $n \in \mathbb{N}$ een metriek d op $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ definiëren. Dit doen we als volgt:

$$d(x, y) = \sup\{2^{-n} \overline{d}_n(x, y) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

waarbij

$$\overline{d}_n(x, y) = \min\{d_n(x, y), 1\}$$

We zullen eerst bewijzen dat π_m continu is voor alle $m \in \mathbb{N}$. Zij U een open in X_m . We willen nu bewijzen dat $\pi_m^{-1}(U)$ open is in X . Zij $x \in \pi_m^{-1}(U)$, dan zien we dat $x_m \in U$, dus bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $B_m(x_m, \delta) \subset U$. We zien nu dat

$$\begin{aligned} B(x, 2^{-m}\delta) &= \{y \in X \mid \sup\{2^{-n} \min\{d_n(x_n, y_n), 1\} \mid n \in \mathbb{N}\} < 2^{-m}\delta\} \\ &\subset \{y \in X \mid d_m(x_m, y_m) < \delta\} \\ &\subset \{y \in X \mid y_m \in B_m(x_m, \delta)\} \\ &\subset \pi_m^{-1}(U). \end{aligned}$$

en dus zien we dat π_m voor alle $m \in \mathbb{N}$ continu is.

Omgekeerd zien we ook dat als π_m continu is voor alle $m \in \mathbb{N}$ dat $B(x, \delta)$ open is voor alle $x \in X$ en $\delta > 0$. Zij $y \in B(x, \delta)$ en $c > 0$ zodat $B(y, c) \subset B(x, \delta)$. We zien dat

We zien dus dat elke punt in $B(x, \delta)$ een open omgeving heeft, dus is $B(x, \delta)$ open in de product topologie. $\square$

1.4 Stelling van Tychonov

De stelling van Tychonov luidt als volgt:

Stelling 1.12. *Zij $\{X_i\}_{i \in I}$ een collectie compacte topologieën. Dan is $\prod_{i \in I} X_i$ met de producttopologie ook compact.*

Voor eindige producten van compacte topologische ruimten weten we al dat die compact zijn. De stelling van Tychonov zegt dat voor oneindige producten hetzelfde geldt. Het bewijs maakt gebruik van het keuzeaxioma. Dit is noodzakelijk, aangezien andersom het keuzeaxioma ook uit de stelling van Tychonov volgt. We zullen eerst het lemma van Zorn benoemen. Daarna zullen we het concept van een net introduceren. Dit kan gezien worden als een veralgemenisering van een rij. Hierna zullen wij ook accumulatiepunten introduceren en wat stellingen hierover bewijzen. Wat blijkt is dat we compacte ruimtes kunnen karakteriseren vanuit netten en hun accumulatiepunten. Dit zal ervoor zorgen dat we de stelling van Tychonov kunnen bewijzen.

1.4.1 Het keuzeaxioma en het Lemma van Zorn

Het keuzeaxioma luidt als volgt:

Definitie 1.13 (keuzeaxioma). Voor alle collecties niet-lege verzamelingen $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ bestaat er een functie $f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ zodanig dat $f(\lambda) \in X_\lambda$ voor alle $\lambda \in \Lambda$.

Voordat we kunnen kijken naar het lemma van Zorn moeten we eerst definiëren wat het betekent dat een verzameling partiële en totale ordening heeft.

Definitie 1.14. Een paar $(P, \leq)$ waarbij P een verzameling is en $\leq$ een relatie is een **partiële ordening** als het voor alle $x, y, z \in P$ voldoet aan:

- **Reflexiviteit:** $x \leq x$
- **Antisymmetrie:** Als $x \leq y$ en $y \leq x$ dan $x = y$
- **Transitiviteit:** Als $x \leq y$ en $y \leq z$ dan $x \leq z$

Een verzameling met een totale ordening heeft nog een extra eigenschap.

Definitie 1.15. Een verzameling met partiële ordening $(T, \leq)$ heeft een **totale ordening** als voor alle $x, y \in T$ geldt dat $x \leq y$ of $y \leq x$.

Voor een verzameling met partiële ordening P en een deelverzameling $D \subset P$ zeggen we dat D een **boven-grens** heeft als er een $b \in P$ bestaat zodat $d \leq b$ voor alle $d \in D$. Een **maximum** van P is een element $m \in P$ waarbij voor alle $p \in P$ geldt dat als $m \leq p$ dat $p = m$.

Lemma 1.16. (van Zorn) *Stel dat $(P, \leq)$ een niet-lege verzameling is met partiële ordening. Als voor elke deelverzameling met totale ordening $T \subset P$ geldt dat het begrensd is, dan heeft P een maximum.*

1.4.2 Karakterisatie van compacte ruimtes

Voordat we Tychonov zullen bewijzen geven we eerst een karakterisatie van compacte ruimtes. In de topologie hebben we al veel karakterisaties gezien. In $\mathbb{R}^n$ weten we bijvoorbeeld dat een verzameling compact is dan en slechts dan als het gesloten en begrensd is. Voor metrische ruimten weten we dat een verzameling compact is dan en slechts dan als het rijcompact is. Deze karakterisaties houden helaas geen stand als we kijken naar algemene compacte verzamelingen. Hiervoor hebben we een algemener begrip van rijen nodig, namelijk een net.

Bij een rij zijn de indices altijd natuurlijke getallen. Bij een net kan dit een willekeurige verzameling zijn. Wel is het belangrijk dat het een gerichte verzameling is.

Definitie 1.17. Een **gerichte verzameling** $(T, \leq)$ is een partiële ordening. Daarnaast moet het voldoen aan de eigenschap dat als $a, b \in T$, dat er een $c \in T$ bestaat zodanig dat $a \leq c$ en $b \leq c$. In andere woorden: Elke eindige deelverzameling is begrensd

dan kunnen we nu een net definiëren.

Definitie 1.18. (Net) Stel dat X een topologische ruimte is en Λ een gerichte verzameling. Dan is een net een functie $x_\bullet : \Lambda \rightarrow X$. Dit wordt ook wel genoteerd als $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Als laatste zullen we ook accumulatiepunten introduceren.

Definitie 1.19. (Accumulatiepunt) Stel dat X een topologische ruimte is en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net. We zeggen dat $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ accumulatiepunt a heeft dan en slechts dan als voor alle open omgevingen U van a en $\mu \in \Lambda$ er een $\lambda \geq \mu$ bestaat zodat $x_\lambda \in U$

We zullen nu zien dat een topologische ruimte compact is dan en slechts dan als voor elke net geldt dat het een accumulatiepunt heeft.

Stelling 1.20. *Zij X een topologische ruimte, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

- (i) X is compact

(ii) Alle netten in X hebben een accumulatiepunt.

Bewijs.

(i) $\implies$ (ii): Stel eerst dat X compact is en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net in X is. Definieer nu

$$A_\mu := \overline{\{x_\lambda | \lambda \geq \mu\}} \text{ en } A := \bigcap_{\mu \in \Lambda} A_\mu$$

We zullen nu laten zien dat alle punten in A accumulatiepunten zijn. Stel namelijk dat $a \in A$. Dan geldt er voor alle omgevingen U van a en alle $\mu \in \Lambda$ dat $U \cap \{x_\lambda | \lambda \geq \mu\} \neq \emptyset$, oftewel er is een $\lambda \geq \mu$ zodanig dat $x_\lambda \in U$. Dit is precies de definitie van een accumulatiepunt en dus is A een verzameling accumulatiepunten. Nu moeten we alleen nog laten zien dat A niet leeg kan zijn. Stel dat $A = \emptyset$, dan zien we dat $X = X \setminus A = \bigcup_{\mu \in \Lambda} X \setminus A_\mu$ en dus is $\{X \setminus A_\mu\}_{\mu \in \Lambda}$ een open dekking van X . Uit de definitie van compactheid volgt dat dat er een eindige $M \subset \Lambda$ bestaat zodat $\bigcup_{\mu \in M} X \setminus A_\mu = X$. Dit betekent ook dat $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \emptyset$. Aangezien Λ een gerichte verzameling is en M eindig is bestaat er een $\kappa \in \Lambda$ zodanig dat $\kappa \geq \mu$ voor alle $\mu \in M$. Dit betekent dat $A_\kappa \subset A_\mu$ voor alle $\mu \in M$ en dus $\emptyset \neq A_\kappa \subset \bigcap_{\mu \in \Lambda} A_\mu$. Dit is een tegenspraak met dat $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \emptyset$.

$\neg$ (i) $\implies$ $\neg$ (ii): Stel nu dat X niet compact is. Dan bestaat er een open dekking $\mathcal{U}$ die geen eindige deelcollectie heeft die heel X dekt. Als we kijken naar alle eindige deelcollecties van $\mathcal{U}$ kunnen we dit een ordening geven. We kijken dan naar de volgende geordende verzameling.

$$\Lambda := (\{\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \mid \mathcal{V} \text{ is eindig}\}, \subset)$$

merk op dat dat deze geordende verzameling ook een gerichte verzameling is. Als $\mathcal{V} \in \Lambda$ en $\mathcal{W} \in \Lambda$ dan is $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ ook eindig en een bovengrens van $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$. We kunnen nu voor iedere eindige $\mathcal{V} \in \Lambda$ een $x_\mathcal{V} \in X$ vinden zodanig dat $x_\mathcal{V} \notin \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$. We zien dan dat $(x_\mathcal{V})_{\mathcal{V} \in \Lambda}$ een net is in X . We laten nu zien dat het geen accumulatiepunt heeft. Stel namelijk dat $x \in X$ en $U \in \mathcal{U}$, zodat $x \in U$. We zien dat voor alle $\mathcal{V} \in \Lambda$ met $\mathcal{V} \supset \{U\}$ geldt dat $x_\mathcal{V} \notin U$, dus is x geen accumulatiepunt.

□

1.4.3 Extra beweringen over netten

Om de stelling van Tychonov te kunnen bewijzen moeten er nog wat extra uitspraken gedaan worden over netten.

Net als een rij kan een net convergeren en kunnen er deelnetten genomen worden.

Definitie 1.21 (Convergentie van een net). Zij X een topologische ruimte. Een net $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in X convergeert naar x dan en slechts als voor elke open omgeving U van x er een $\mu \in \Lambda$ bestaat zodanig dat $x_\lambda \in U$ voor alle $\lambda \in \Lambda$ met $\lambda \geq \mu$.

Definitie 1.22. (Deelnet) Zij $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net. Zij $\mathcal{D}$ een gerichte verzameling en $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \Lambda$ een functie met de eigenschap dat als $a, b \in \mathcal{D}$ en $a \leq b$ dat $\phi(a) \leq \phi(b)$ (**monotonie**) en dat voor elke $\mu \in \Lambda$ er een $c \in \mathcal{D}$ bestaat zodat $\phi(c) \geq \mu$ (**finaliteit**). Dan is $(x_{\phi(\kappa)})_{\kappa \in \mathcal{D}}$ een deelnet van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

We zullen nu bewijzen dat voor een accumulatiepunt van een net er een deelnet is die naar dat punt convergeert. Dit zal erg handig blijken voor het bewijs van Tychonov

Lemma 1.23. Zij X een topologische ruimte en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net in X . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

- (i) a is een accumulatiepunt van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$
- (ii) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ heeft een deelnet die naar a convergeert

Bewijs.

- (i) $\implies$ (ii): Stel dat a een accumulatiepunt is van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. We definiëren nu de volgende gerichte verzameling:

$$\mathcal{D} := (\{(\lambda, U) \mid \lambda \in \Lambda, U \text{ is een open omgeving van } a \text{ en } x_\lambda \in U\}, \leq)$$

hierbij definiëren we $\leq$ als

$$(\lambda, U) \leq (\mu, V) \text{ dan en slechts dan als } \lambda \leq \mu \text{ en } U \supset V$$

$\mathcal{D}$ is een gerichte verzameling. Stel namelijk dat $(\lambda, U), (\mu, V) \in \mathcal{D}$. We weten dan dat $W := U \cap V$ ook een open omgeving is van a . Doordat Λ een gerichte verzameling is bestaat er $\kappa \in \Lambda$ zodanig dat $\kappa \geq \lambda, \mu$. Door de definitie van een accumulatiepunt bestaat er een $\nu \geq \kappa'$ zodanig dat $x_\nu \in W$ en dus zien we dat $(\nu, W) \in \mathcal{D}$ en $(\nu, W) \geq (\lambda, U), (\mu, V)$.

Als we nu $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \Lambda$ definiëren als $\phi(\lambda, U) = \lambda$ dan zien we dat ϕ monotoon is en finaal dus is $(x_{\phi(\lambda, U)})_{(\lambda, U) \in \mathcal{D}}$ een deelnet van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Voor alle open omgevingen $U \ni a$ weten we dat er een $\mu \in \Lambda$ bestaat zodat $x_\mu \in U$. Voor alle $(\lambda, V) \in \mathcal{D}$ met $(\lambda, V) \geq (\mu, U)$ zien we dat $x_{\phi(\lambda, V)} = x_\lambda \in V \subset U$, dus convergeert $(x_{\phi(\lambda, U)})_{(\lambda, U) \in \mathcal{D}}$ naar a .

- (ii) $\implies$ (i): Stel nu andersom dat $(x_{\phi(\kappa)})_{\kappa \in \mathcal{D}}$ een deelnet is die naar a convergeert. Zij U een open omgeving en $\mu \in \Lambda$. Door de co-finaliteit van ϕ bestaat er een $\kappa \in \mathcal{D}$ zodat $\phi(\kappa) \geq \mu$ en door de convergentie van $(x_{\phi(\kappa)})_{\kappa \in \mathcal{D}}$ bestaat er een $\kappa' \in \mathcal{D}$ zodat als $\lambda \geq \kappa'$ dat $x_{\phi(\lambda)} \in U$. Doordat $\mathcal{D}$ een gerichte verzameling is bestaat er een $\lambda \geq \kappa', \kappa$, dus geldt er dat $x_{\phi(\lambda)} \in U$ en vanwege de monotonie van ϕ zien we dat $\phi(\lambda) \geq \phi(\kappa) \geq \mu$, dus is a een accumulatiepunt van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. □

We weten dat als een rij convergeert, dat alle deelrijen naar hetzelfde punt convergeren. Nu zullen we zien dat als een net convergeert, dat alle deelnetten naar hetzelfde punt convergeren.

Lemma 1.24. *Zij X een topologische ruimte en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net die naar $a \in X$ convergeert. Zij $(x_{\phi(\mu)})_{\mu \in \mathcal{D}}$ een deelnet, dan convergeert $(x_{\phi(\mu)})_{\mu \in \mathcal{D}}$ ook naar a .*

Bewijs. Zij U een open omgeving van a . We weten dat er een $\mu' \in \Lambda$ bestaat zodanig dat voor alle $\lambda \geq \mu'$ geldt dat $x_\lambda \in U$. Door de finaliteit ϕ weten we dat er een $\mu \in \mathcal{D}$ bestaat zodanig dat $\phi(\mu) \geq \mu'$. Voor alle $\kappa \geq \mu$ zien we door de monotonie van ϕ dat $\phi(\kappa) \geq \phi(\mu) \geq \mu'$, dus geldt er dat $x_{\phi(\kappa)} \in U$. □

Net als bij rijen geldt er dat componentsgewijze convergentie equivalent is aan convergentie.

Lemma 1.25. *Zij $\{X_i\}_{i \in I}$ een collectie topologische ruimtes, $X = \prod_{i \in I} X_i$ met de producttopologie en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net in X . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

- (i) $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ convergeert naar $a \in X$
- (ii) Voor alle $k \in I$ geldt dat $\{x_\lambda|_{\{k\}}\}_{\lambda \in \Lambda}$ convergeert naar $a|_{\{k\}}$.

Bewijs.

- (i) $\implies$ (ii) Stel dat (i) waar is. Zij $k \in I$ en U_k een open omgeving van $a|_{\{k\}}$. Definieer $U_i = X_i$ als $i \neq k$, dan is $U := \prod_{i \in I} U_i$ een open omgeving van a . Vanwege (i) bestaat er een $\mu \in \Lambda$ zodanig dat voor alle $\lambda \geq \mu$ geldt dat $x_\lambda \in U$, dus $x_\lambda|_{\{k\}} \in U_k$.
- (ii) $\implies$ (i) Stel nu dat (ii) waar is. Stel dat U een open omgeving is van a . Door lemma 1.8 kunnen we zonder verlies van algemeenheid zeggen dat U element is van (1.1). We zullen nu J uit (1.1) gebruiken. Door (ii) weten we dat voor alle $j \in J$ geldt dat er een $\mu_j \in \Lambda$ bestaat, zodat voor alle $\lambda \geq \mu_j$ geldt dat $x_\lambda|_{\{j\}} \in U_j$. Aangezien J eindig is bestaat en omdat Λ een gerichte verzameling is bestaat er een

$\mu \in \Lambda$ zodat $\mu \geq \mu_j$ voor alle $j \in J$. Dus voor alle $\lambda \geq \mu$ zien we dat $x_\lambda|_J \in \prod_{j \in J} U_j$. Aangezien $U_i = X_i$ voor alle $i \in I \setminus J$ zien we dat $x_\lambda \in U$.

□

1.4.4 Bewijs van Tychonov

In deze hele sectie is $\{X_i\}_{i \in I}$ een collectie compacte topologische ruimten, $X = \prod_{i \in I} X_i$ met de producttopologie en $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ een net in X . Ook definiëren we de volgende partieel geordende verzameling:

$$P := (\{(a, J) \mid a \text{ is een accumulatiepunt van het net } (x_\lambda|_J)_{\lambda \in \Lambda} \mid J \subset I\}, \leq)$$

Hierbij zeggen we dat $(a, J) \leq (a', J')$ dan en slechts dan als $J \subset J'$ en $a'|_J = a$.

Lemma 1.26. *Zij $T \subset P$ een totaal geordende verzameling, dan heeft T een bovengrens.*

Bewijs. Stel dat we een totale geordende deelverzameling $T \subset P$ hebben. We zullen bewijzen dat T een bovengrens moet hebben. Kies namelijk (m, K) waarbij voor alle $k \in K$

$$m_k = a_k \text{ voor alle } (a, J) \in T \text{ met } k \in J \quad (1.3)$$

en

$$K = \bigcup_{(a, J) \in T} J \quad (1.4)$$

Aangezien T een geordende deelverzameling is geldt er voor alle $(a, J), (a', J') \in T$ zonder verlies van algemeenheid dat $(a, J) \leq (a', J')$. Dit betekend dat de accumulatiepunten onderling gelijk zijn op hun gemeenschappelijk indices. Hierdoor is (1.3) goed gedefinieerd. Ook geldt voor alle $(a, J) \in P$ dat $J \subset K$ en $m|_J = a$, dus (m, K) is een bovengrens van T .

Nu hoeven we alleen nog te bewijzen dat m een accumulatiepunt is van $(x_\lambda|_K)_{\lambda \in \Lambda}$. Zij $U \subset \prod_{i \in K} X_i$ een open omgevingen van m . Door lemma 1.8 kunnen we zonder verlies van algemeenheid zeggen dat $U = \prod_{i \in K} U_i$ waarbij $U_l \subset X_l$ open is voor alle $l \in L$ en $U_i = X_i$ voor alle $i \in K \setminus L$. Hierbij is L een eindige $L \subset K$. We weten dat er een $(a, J) \in T$ bestaat zodanig dat $L \subset J$. Aangezien $\prod_{i \in J} U_i$ een open omgeving is van $m|_J = a$ en a een accumulatiepunt is van $(x_\lambda|_J)_{\lambda \in \Lambda}$ geldt voor alle $\mu \in \Lambda$ dat voor een $\lambda \geq \mu$ geldt dat $x_\lambda|_J \in \prod_{i \in J} U_i$, dus ook $x_\lambda|_L \in \prod_{i \in L} U_i$. Aangezien $U_i = X_i$ voor alle $i \in K \setminus L$ zien we dat $x_\lambda|_K \in \prod_{i \in K} U_i$, dus is m een accumulatiepunt van $(x_\lambda|_K)_{\lambda \in \Lambda}$ en geldt er dat $(m, K) \in P$.

□

Lemma 1.27. *P heeft een maximum.*

Bewijs. Merk ten eerste op dat P niet leeg is. Uit stelling 1.20 volgt namelijk dat voor willekeurige $i \in I$ geldt dat $(x_\lambda|_{\{i\}})_{\lambda \in \Lambda}$ een accumulatiepunt a heeft, dus geldt $(a, \{i\}) \in P$. Door lemma 1.26 weten we dat iedere totaal geordende verzameling $T \subset P$ begrensd is. Door het lemma van Zorn weten we dat dit betekend dat P een maximum heeft.

□

Lemma 1.28. *Als $(a, J) \in P$ en $J \subsetneq I$ dan bestaat er een $(a', J') \in P$ zodanig dat $(a, J) \leq (a', J')$ en $J \neq J'$.*

Bewijs. Stel nu dat $(a, J) \in P$ en $J \subsetneq I$. We weten dan door lemma 1.23 dat $(x_\lambda|_J)_{\lambda \in \Lambda}$ een deelnet $(x_{\phi(\mu)}|_J)_{\mu \in M}$ heeft die naar a convergeert. Neem nu $k \in I \setminus J$. Uit stelling 1.20 volgt dat $(x_{\phi(\mu)}|_{\{k\}})_{\mu \in M}$ een accumulatiepunt b heeft, dus heeft het een deelnet $(x_{\phi(\chi(\nu))}|_{\{k\}})_{\nu \in N}$ die naar b convergeert. Door lemma 1.24 convergeert $(x_{\phi(\chi(\nu))}|_J)_{\nu \in N}$ naar a . Door lemma 1.25 convergeert $(x_{\lambda_{\mu_\nu}}|_{J \cup \{k\}})_{\nu \in N}$ naar a' waarbij $a'_j = a_j$ voor alle $j \in J$ en $a'_k = b$. Door lemma 1.23 geldt er dat a' een accumulatiepunt is van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. We zien dan dat $(a', J \cup \{k\}) \in P$ en dat $(a, J) \leq (a', J \cup \{k\})$. $\square$

Nu kunnen we de stelling van Tychonov bewijzen. Hiervoor hoeven we alleen te bewijzen dat X compact is.

Bewijs van Tychonov. Wegens lemma 1.27 heeft P een maximum (a, J) . Stel nu dat $J \subsetneq I$ dan weten we wegens lemma 1.28 dat er een $(a', J') \in P$ zodanig dat $(a, J) \leq (a', J')$ en $J \neq J'$. Dit zou betekenen dat (a, J) geen maximum is en dus moet er gelden $J = I$. Hieruit volgt dat a een accumulatiepunt is van $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Hieruit concluderen we dat alle netten in $\prod_{i \in I} X_i$ een accumulatiepunt hebben en dus is het wegens stelling 1.20 compact. $\square$