

Hoofdstuk 1

Pro-eindige verzamelingen

In dit hoofdstuk zullen wij de definitie geven van een pro-eindige verzamelingen. Er moet wel opgemerkt worden dat wat wij beschouwen als een pro-eindige verzameling, doorgaands een lichte pro-eindige verzameling genoemd wordt (zie opmerking 1.3). Daarna zullen we wat voorbeelden geven van pro-eindige verzamelingen. Een belangrijk voorbeeld hiervan is de Cantorverzameling. Aan het einde van het hoofdstuk zullen we ook een karakterisatie geven van pro-eindige verzamelingen. We gebruiken in deze bewijzen de resultaten uit hoofdstuk 1 over de product topologie.

De definitie van een pro-eindige verzameling is afkomstig van “Galois theory for schemes” H. W. Lenstra. De voorbeelden van pro-eindige verzamelingen zijn afkomstig van een hoorcollege door Peter Scholze over gecondenseerde verzamelingen. Ook de karakterisatie van pro-eindige verzamelingen is hier van afkomstig.

1.1 Definitie en voorbeelden

Definitie 1.1. Een **invers systeem** in een categorie $\mathcal{C}$ is een collectie objecten $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ samen met een collectie morfismen $(f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Voor een invers systeem van topologieën zullen we nu een inverse limiet bepalen.

Definitie 1.2. Zij $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een collectie topologische ruimten en $(f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een collectie afbeeldingen. De **inverse limiet** is gedefinieerd als volgt:

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid f_n(x_{n+1}) = x_n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

waarbij $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ de deeltopologie heeft van $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Opmerking 1.3. Feitelijk is $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ misbruik van notatie, omdat het naast $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ook afhankelijk is van $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Elke keer dat een inverse limiet gebruikt wordt zal het uit de context duidelijk moeten zijn wat deze morfismen zijn.

Definitie 1.4. Een topologische ruimte is **pro-eindig** als het homeomorf is met een inverse limiet van eindige, discrete topologieën.

Opmerking 1.5. De definitie van een pro-eindige verzameling die we hier geven is niet helemaal correct. In feite hebben we hier alleen over lichte pro-eindige verzamelingen. Toch zullen wij deze verzamelingen aanduiden als pro-eindige verzamelingen aangezien we geen andere pro-eindige verzamelingen tegen zullen komen behalve lichte pro-eindige verzamelingen.

Om te bewijzen dat een topologische ruimte pro-eindig is moeten we eerst een invers systeem opstellen en dan bewijzen dat de ruimte homeomorf is aan de inverse limiet van het systeem. Om dit laatste te bewijzen

is het nodig om een homeomorfisme op te stellen. Het is vrij omslachtig om te bewijzen dat een functie naar een inverse limiet continu is met de topologie die we hier gegeven hebben. Vandaar dat we nu een lemma geven waardoor het makkelijker zal zijn om te zien of een afbeelding uit een pro-eindige verzameling continu is.

Lemma 1.6. *Zij T een topologische ruimte en $\{X_i\}_{i \in I}$ een collectie topologische ruimtes. Als voor $F : T \rightarrow \varprojlim_{i \in I} X_i$ geldt dat F_i voor alle $i \in I$ continu zijn, dan is F continu.*

Bewijs. Zij $\iota : \varprojlim_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ de inclusie. Aangezien $\varprojlim_{i \in I} X_i$ de deeltopologie heeft, is F continu als $\iota \circ F$ continu is. Vanwege lemma ?? weten we dat $\iota \circ F$ continu is als $\pi_i \circ \iota \circ F = \pi_i \circ F$ continu is. We concluderen dus dat F continu is als het continu is in zijn componenten. $\square$

Voorbeeld 1.7. Een voorbeeld van een pro-eindige verzameling is $\mathbb{N} \cup \infty$ met met de volgende topologische basis:

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{\{N\}, \{N, N+1, \dots, \infty\}\}.$$

Deze topologische ruimte noteren we met $\mathbb{N}^\infty$.

Om te laten zien dat voorbeeld 1.7 een pro-eindige verzameling is moeten we een homeomorfisme opstellen met een inverse limiet. Voor het inverse systeem moeten we een collectie eindige verzamelingen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiëren samen met een collectie afbeeldingen $(f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dit doen we als volgt:

$$\begin{aligned} X_0 &:= \{\infty\} \\ X_n &:= X_{n-1} \cup \{n-1\} \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

En de afbeeldingen definiëren we zodat alles dat niet naar zichzelf gestuurd kan worden naar oneindig wordt gestuurd:

$$f_n(m) = \begin{cases} m & \text{als } m < n \\ \infty & \text{anders} \end{cases}.$$

Nu moeten we een homeomorfisme $F : \mathbb{N}^\infty \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ definiëren:

$$F_n(m) = \begin{cases} m & \text{als } m < n \\ \infty & \text{anders} \end{cases}.$$

Dat F injectief is, is triviaal. Nu zullen we bewijzen dat F surjectief is. Stel dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Als voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $x_n = \infty$ dan zien we dat $F(\infty) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Als er niet geldt dat $x_n = \infty$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ nemen we de kleinste $m \in \mathbb{N}$ zodanig dat $x_m \neq \infty$. Er geldt dat $x_m \in X_m$, dus $x_m \leq m-1$. Bovendien geldt er dat $f_{m-1}(x_m) = x_{m-1} = \infty$, dus $x_m \geq m-1$. Hieruit volgt dat $x_m = m-1$. Aangezien $f_n(x_{n+1}) = x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ zien we met inductie dat $x_n = m-1$ voor alle $n \geq m$. We zien dus dat $F(m-1) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Door lemma 1.6 is het voldoende om te bewijzen dat de componenten van F continu zijn. Observeer dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $m \in X_n \setminus \{\infty\}$ geldt dat $F^{-1}(\{m\}) = \{m\}$ en dat $F_n^{-1}(\{\infty\}) = \{n, n+1, \dots, \infty\}$. Het teruggehaald beeld van alle singletons zijn open en dus is F_n continu, waaruit we kunnen concluderen dat F ook continu is.

Onthoudt dat $\mathbb{N}^\infty$ een gesloten deelruimte is van de compactificatie van de reële getallen $\mathbb{R}^\infty$. Hieruit volgt dat $\mathbb{N}^\infty$ compact is. Ook zullen we later in lemma 1.9 bewijzen dat alle pro-eindige verzamelingen Hausdorff zijn. We kunnen hieruit concluderen dat F^{-1} ook continu is en dus is F een homeomorfisme.

Voorbeeld 1.8 (Cantor verzameling). Een ander voorbeeld van een pro-eindige verzameling is de Cantor verzameling. Onthoudt dat de cantor-verzameling gelijk is aan

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n, \text{ waarbij } C_0 := [0, 1] \text{ en } C_n := \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(1 - \frac{1}{3}C_{n-1}\right) \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Net als in het eerdere voorbeeld moeten we een invers systeem definiëren. Definieer X_n als de verzameling van componenten van C_n . We zien dan bijvoorbeeld dat $X_2 = \{[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]\}$. Voor ons invers systeem hebben we ook nog morfismes nodig. Om deze te definiëren zal het ons helpen om eerst een afbeelding

$$F : C \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

te construeren. We definiëren $F_n(x) \in X_n$ als de unieke $[a, b] \in X_n$ zodanig dat $x \in [a, b]$. Het is ook mogelijk om F_n expliciet uit te schrijven:

$$F_n(x) = \left[\left\lfloor \frac{x3^n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{2}{3^n}, \left\lfloor \frac{x3^n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{2}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right]. \quad (1.1)$$

Nu kunnen we $f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ simpelweg definiëren als $f_n([a, b]) = F_n(a) = F_n(b)$.

We kunnen nu ook zien dat F wel-gedefinieerd is. Voor willekeurige $x \in C$ en $n \in \mathbb{N}$ bestaat er een unieke $[a_n, b_n] \in X_n$ zodat $x \in [a_n, b_n]$ en een unieke $[a_{n+1}, b_{n+1}] \in X_{n+1}$ zodat $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Bovendien zien we ook dat $F_n(x) = [a_n, b_n]$ en $F_{n+1}(x) = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. We zien door (1.1) dat $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, dus ook dat $f([a_{n+1}, b_{n+1}]) = F(a_{n+1}) = F(b_{n+1}) = [a_n, b_n]$.

Nu we de inverse limiet hebben gedefinieerd hoeven we alleen nog te laten zien dat F een homeomorfisme is. Stel dat $x \neq y$. Dan weten we dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-y)3^n}{2} = \pm\infty$ en dus bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\left\lfloor \frac{(x-y)3^n}{2} \right\rfloor \geq 1$. Voor deze n zien we ook dat $\left\lfloor \frac{x3^n}{2} \right\rfloor \neq \left\lfloor \frac{y3^n}{2} \right\rfloor$ en dus geldt er dat $F(x) \neq F(y)$. We zien dus dat F injectief is. Om surjectiviteit te bewijzen nemen we $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$. We zien dan dat $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{3}|a_n - b_n|$ en dat $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Hieruit zien we dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$ voor een $x \in [0, 1]$. We zien dan dat $F_n(x) = [a_n, b_n]$.

Om te bewijzen dat F continu is hoeven we wegens lemma 1.6 alleen te bewijzen dat F_n continu is voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Voor een zekere $[a, b] \in X_n$ zien we dat $F_n^{-1}([a, b]) = [a, b] \cap C$. Omdat X_n eindig is, zien we nu dat een teruggehaald beeld van elke gesloten verzameling gesloten is en dus is F_n continu.

We weten dat de cantor verzameling een gesloten deelruimte is van $[0, 1]$, dus is het compact. In lemma 1.9 zullen we bewijzen dat alle pro-eindige verzamelingen Hausdorff zijn. Hieruit kunnen we concluderen dat F^{-1} ook continu moet zijn en daarom is F een homeomorfisme en de Cantor verzameling een pro-eindige verzameling.

1.2 Karakterisatie van Pro-eindige verzamelingen

We zullen nu bewijzen dat pro-eindige verzamelingen voldoen aan een aantal topologische eigenschappen. Het blijkt namelijk dat alle pro-eindige verzamelingen Hausdorff, compact, totaal onsamenvastend en metriseerbaar zijn. Omgekeerd geldt er ook dat alle ruimtes die Hausdorff, compact, totaal onsamenvastend en metriseerbaar zijn, pro-eindig zijn. Dit laatste zullen we hier niet bewijzen.

Lemma 1.9. *Pro-eindige verzamelingen zijn Hausdorff.*

Bewijs. Een discrete topologie is altijd Hausdorff. Een product van Hausdorff-ruimtes is opnieuw Hausdorff en een deelruimte van een Hausdorff-ruimte is ook Hausdorff. Een inversie limiet is altijd een deelruimte van een product van discrete topologieën en daarom is een inverse limiet altijd Hausdorff. Aangezien Hausdorff een topologische eigenschap is zijn pro-eindige verzamelingen ook Hausdorff. $\square$

Lemma 1.10. *Pro-eindige verzamelingen zijn compact.*

Bewijs. We zien dat

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid f_n(x_{n+1}) = x_n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} \right\} \quad (1.2)$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid f_n(x_{n+1}) = x_n \right\} \quad (1.3)$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x_n \in X_n} \left(\prod_{i \in \{0, \dots, n-1\}} X_i \right) \times \{x_n\} \times f_n^{-1}(\{x_n\}) \times \left(\prod_{i \in \mathbb{N}_{>n+1}} X_i \right) \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

We zien dat

$$\left(\prod_{i \in \{0, \dots, n-1\}} X_i \right) \times \{x_n\} \times f_n^{-1}(\{x_n\}) \times \left(\prod_{i \in \mathbb{N}_{>n+1}} X_i \right)$$

gesloten is voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $x_n \in X_n$. Aangezien X_n eindig is voor alle $n \in \mathbb{N}$ zien we dat $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ook gesloten is.

We weten dat eindige discrete topologieën altijd compact zijn. Door de stelling van tychonov is het product van eindige discrete topologieën ook compact. Aangezien $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ een gesloten deelruimte is van een product van eindige discrete topologieën is $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ook compact. Aangezien compactheid een topologische eigenschap is betekent dit dat alle pro-eindige verzamelingen compact zijn. $\square$

Definitie 1.11 (Totaal onsamenvangende ruimte). Een ruimte is totaal onsamenvangend als de enige samenvangende componenten singletons zijn.

Lemma 1.12. *Pro-eindige verzamelingen zijn totaal onsamenvangend.*

Bewijs. De discrete topologie is totaal onsamenvangend. Aangezien producten en deelruimtes van totaal onsamenvangende ruimtes opnieuw onsamenvangend zijn, zien we dat de inverse limiet totaal onsamenvangend is. Aangezien totaal onsamenvangendheid een topologische eigenschap is zien we dat alle pro-eindige topologieën totaal onsamenvangend zijn. $\square$

Propositie 1.13. *Pro-eindige verzamelingen zijn metriseerbaar.*

Bewijs. We weten dat discrete topologieën metriseerbaar zijn. Door stelling ?? weten we dan dat een aftelbaar product van discrete topologieën metriseerbaar is. Aangezien een deelruimte van een metrische ruimte weer metriseerbaar is, weten we dat een invers limiet van discrete topologieën metriseerbaar is. Aangezien metriseerbaarheid een topologische eigenschap is zien we dat alle pro-eindige verzamelingen metriseerbaar zijn. $\square$