

Hoofdstuk 1

Gecondenseerde verzamelingen

Dit hoofdstuk gaat over gecondenseerde verzamelingen. Er moet wel opgemerkt worden dat wat wij beschouwen als een gecondenseerde verzameling, doorgaands een lichte gecondenseerde verzameling genoemd wordt (zie opmerking 1.2). We kunnen een gecondenseerde verzameling beschouwen als een functor die een pro-eindige verzameling stuurt naar een verzameling van afbeeldingen S naar X . Gecondenseerde verzamelingen geven ons een manier om topologieën te vervangen. Het is namelijk mogelijk om vanuit een topologie een gecondenseerde verzameling te creëren. Dit noemen we het gecondenseerde analagon. Het is ook mogelijk om vanuit een gecondenseerde verzameling een topologie te creëren en dit zullen we een topologische benadering noemen.

In sectie 1 zullen we de formele definitie van een gecondenseerde verzameling geven, daarna zullen we kijken hoe dit rijmt met de informele uitspraak dat we $X(S)$ kunnen beschouwen als een collectie afbeeldingen tussen S en X . We zullen twee voorbeelden van gecondenseerde verzamelingen. Daarna zullen we het Yoneda lemma behandelen. Dit zal ons een formele manier geven hoe we $X(S)$ kunnen zien als een collectie afbeeldingen van S naar X .

In sectie 2 zullen we een functor definiëren van topologieën naar gecondenseerde verzamelingen. Deze functor noemen we de gecondenseerde analogonsfunctor. Deze functor maakt het mogelijk om interessantere voorbeelden te geven van gecondenseerde verzamelingen.

In sectie 3 zullen we een functor definiëren van gecondenseerde verzamelingen naar topologieën. Deze functor noemen we de topologische benaderingsfunctor. Het zal blijken dat deze functor de linksgeadjungeerde is van de gecondenseerde analogonsfunctor.

In sectie 4 zullen we kijken hoe goed de topologische benadering van een gecondenseerde analagon van een topologie de topologie benadert. Het zal blijken dat deze benadering goed gaat dan en slechts dan als de topologie sequentieel is. Dit resultaat zal ons helpen te bewijzen dat de gecondenseerde analogonsfunctor fully faithful is als we alleen kijken naar sequentiele topologieën. Het zal ons zelfs lukken om een nog sterkere uitspraak te bewijzen. Namelijk dat de gecondenseerde analogon functor “alleen maar” fully faithful is als we kijken sequentiele topologieën.

Dit hele hoofdstuk is gebaseerd op de video's [?] en het dictaat [?] van Peter Scholze. Een verschil is wel dat wij veel meer uitspraken zullen bewijzen. Dit is dan eigen werk. Wat ook eigen werk is, is de uitspraak dat de gecondenseerde analogonsfunctor alleen fully faithful is op sequentiele topologieën. Peter Scholze daarentegen zei alleen dat de gecondenseerde analogonsfunctor fully faithful is op sequentiele topologieën en deed verder geen uitspraken over hoe de functor zich gedroeg wanneer de topologieën niet sequentieel waren.

1.1 Definitie, voorbeelden en Yoneda

Definitie 1.1. Een **gecondenseerde verzameling** is een functor

$$X : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}.$$

De functor X moet voldoen aan de volgende eigenschappen:

- (i) Een gecondenseerde verzamelingen stuurt de lege verzamelingen naar een singleton:

$$X(\emptyset) = \{*\}.$$

- (ii) Definieer de functoren

$$F, G : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \times \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

waarbij

$$F(S_1, S_2) = X(S_1 \sqcup S_2) \text{ en } G(S_1, S_2) = X(S_1) \times X(S_2).$$

Dan moet er gelden dat $\eta : F \rightarrow G$ gedefinieerd als $\eta_{(S_1, S_2)} := (X(\iota_1), X(\iota_2))$, waarbij ι_1 en ι_2 de inclusie zijn van respectievelijk $S_1 \rightarrow S_1 \sqcup S_2$ en $S_2 \rightarrow S_1 \sqcup S_2$ een isomorfisme is.

- (iii) Voor een willekeurige surjectie $f : T \rightarrow S$ geldt dat

$$X(S) \xrightarrow{X(f)} X(T) \begin{matrix} \xrightarrow{X(\pi_1)} \\ \xrightarrow{X(\pi_2)} \end{matrix} X(T \times_S T)$$

een equalizer is. Aangezien T en S topologische ruimtes zijn kunnen we zeggen dat

$$T \times_S T = \{(t_1, t_2) \in T \times T \mid f(t_1) = f(t_2)\}.$$

De categorie van gecondenseerde verzamelingen samen met de natuurlijke transformaties tussen gecondenseerde verzamelingen noteren we met Cond .

Opmerking 1.2. De definitie van een gecondenseerde verzameling die we hier geven is anders dan de gebruikelijke definitie van gecondenseerde verzamelingen. Wat wij hier duiden als een gecondenseerde verzameling wordt doorgaands een lichte gecondenseerde verzameling genoemd. Toch zullen wij deze verzamelingen aanduiden als gecondenseerde verzamelingen, aangezien we geen andere gecondenseerde verzamelingen tegen zullen komen.

Opmerking 1.3. Voor een gegeven gecondenseerde verzameling X en pro-eindige verzameling S , is het handig om naar $X(S)$ te kijken als een collectie afbeeldingen van S naar X . Merk op dat deze drie eigenschappen hiermee overeenkomen. Eigenschap (i) komt overeen met het feit dat er maar één afbeelding is van $\emptyset$ naar X . Eigenschap (ii) volgt uit het feit dat een afbeelding van $S_1 \sqcup S_2$ naar X equivalent is aan twee aparte afbeeldingen S_1 naar X en S_2 naar X . De derde eigenschap volgt uit het feit dat het hebben van een afbeelding van $T \times_S T$ naar X equivalent is aan het hebben van een afbeelding T naar X die gelijk is op de vezels van f .

Iedere gecondenseerde verzameling heeft ook een onderliggende verzameling.

Definitie 1.4 (De onderliggende verzameling). Voor een gecondenseerde verzameling X is de onderliggende verzameling $X(\{*\})$

Nu zullen we een voorbeeld geven van een gecondenseerde verzameling.

Voorbeeld 1.5. We definiëren de Singleton gecondenseerde verzameling $E : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ als $E(S) = \{*\}$ voor alle pro-eindige S . Dat E voldoet aan (i) volgt direct. Dat E voldoet aan (ii) volgt uit het feit dat $E(S_1 \sqcup S_2) = \{*\}$ en dat $E(S_1) \times E(S_2) = \{*\} \times \{*\} = \{*\}$ voor alle pro-eindige S_1, S_2 . Neem nu een willekeurige surjectie $f : T \rightarrow S$ tussen pro-eindige verzamelingen. We zien dat $E(T) = E(S) = E(T \times_S T) = \{*\}$ en dat $E(f) = E(\pi_1) = E(\pi_2) = \text{Id}$, dus hebben we een equalizer.

Dit voorbeeld is nog niet heel interessant. Dit komt omdat we nog niet het gereedschap hebben om echt interessante voorbeelden te kunnen geven.

1.1.1 Yoneda

Eerder hadden we gezegd dat we $X(S)$ kunnen zien als een collectie afbeeldingen van S naar X . Dankzij het Yoneda lemma kunnen we dit formaliseren. We zullen hier het Yoneda lemma herhalen. Het bewijs staat in [?, p. 57-59].

Propositie 1.6. [?, p. 57][Yoneda] *Zij $\mathcal{C}$ een lokaal-kleine categorie. Dan zijn de functors*

$$\begin{aligned} (F, A) &\mapsto F(A) && : \text{Set}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set} \\ (F, A) &\mapsto \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -), F) && : \text{Set}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set} \end{aligned}$$

isomorf.

Hieruit volgt direct wat we nodig hebben. We zullen hierbij de notatie gebruiken dat voor een continue verzameling A geldt dat

$$\underline{A} := \text{Hom}_{\text{Top}}(-, A).$$

Dat $\underline{A}$ daadwerkelijk een gecondenseerde verzameling is, zullen we in de volgende sectie bewijzen.

Gevolg 1.7. *Zij X een gecondenseerde verzameling en S een pro-eindige verzameling. Dan geldt er dat $X(S) \cong \text{Hom}(\underline{S}, X)$.*

Bewijs. We weten dat $X : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$, dus wegens Yoneda zien we dat

$$X(S) \cong \text{Hom}(\text{Hom}_{\text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}}}(S, -), X) = \text{Hom}(\text{Hom}_{\text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})}(-, S), X) = \text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{S}, X).$$

□

Nu we hebben laten zien dat $X(S) \cong \text{Hom}(\underline{S}, X)$, moeten we alleen nog bekijken wat $X(f)$ wordt voor een willekeurige $f : T \rightarrow S$.

Gevolg 1.8. *Zij X een gecondenseerde verzameling en $f : T \rightarrow S$ een morfisme tussen pro-eindige verzamelingen. Dan geldt er dat $X(f) \simeq (f_*)^*$.*

Bewijs. We zien door Yoneda dat

$$X(f) \simeq \text{Hom}(\text{Hom}_{\text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})}(-, f), X) = \text{Hom}(f_*, X) = (f_*)^*$$

□

We kunnen ook voor een morfisme $f : X \rightarrow Y$ tussen gecondenseerde verzamelingen zeggen wat f_S is voor een willekeurige pro-eindige S .

Gevolg 1.9. *Zij $f : X \rightarrow Y$ een morfisme tussen gecondenseerde verzamelingen, dan geldt er dat $f_S = f_*$.*

Bewijs. We zien door Yoneda dat voor een willekeurige pro-eindige S geldt dat

$$f_S = \text{Hom}(\text{Hom}_{\text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})}(-, S), f) = f_*.$$

□

1.2 De gecondenseerde analogonsfunctor

We zullen nu zien hoe we vanuit een topologie een gecondenseerde verzameling kunnen creëren. Stel dat A een topologische ruimte is. We zullen de gecondenseerde analagon van A noteren als $\underline{A}$. We zullen nu $\underline{A}(S)$ definiëren als de verzameling afbeeldingen van S naar A . Aangezien A en S topologische ruimtes zijn is het logisch om alleen naar de continue afbeeldingen te kijken.

Definitie 1.10. Voor twee topologische ruimten A en B definiëren we

$$\text{Cont}(A, B) := \text{Hom}_{\text{Top}}(A, B),$$

oftewel de verzameling van continue afbeeldingen tussen A en B .

Definitie 1.11. Voor een topologische ruimte A , definiëren we $\underline{A} = \text{Cont}(-, A)$. We zien dan dat $\underline{A}(f) = f^*$.

We zullen nu bewijzen dat $\underline{A}$ een gecondenseerde verzameling is.

Stelling 1.12. Voor een topologische ruimte A is $\underline{A} : S \mapsto \text{Cont}(S, A)$, $f \mapsto f^*$ een gecondenseerde verzameling.

Bewijs. Zij A een topologische ruimte. We zien dat $\underline{A}(\emptyset) = \text{Cont}(\emptyset, A) = \{*\}$.

We zien ook dat de functoren

$$F, G : \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \times \text{Pro}_{\mathbb{N}}(\text{fin})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

waarbij

$$F(S_1, S_2) = \text{Cont}(S_1 \sqcup S_2, A) \text{ en } G(S_1, S_2) = X(S_1) \times X(S_2)$$

isomorf zijn, aangezien we zien dat $((\iota_1)^*, (\iota_2)^*) : \underline{A}(S_1 \sqcup S_2) \rightarrow \underline{A}(S_1) \times \underline{A}(S_2)$ gelijk is aan $f \mapsto (f|_{S_1}, f|_{S_2})$ en dit is een bijectie.

Als laatste moeten we nog laten zien dat

$$\underline{A}(S) \xrightarrow{f^*} \underline{A}(T) \xrightarrow[\pi_2^*]{\pi_1^*} \underline{A}(T \times_S T)$$

een equalizer is. Hiervoor nemen we een willekeurige verzameling U met een afbeelding $m : U \rightarrow \underline{A}(T)$ die voldoet aan $\pi_1^* \circ m = \pi_2^* \circ m$. Er moet een unieke $h : U \rightarrow \underline{A}(S)$ bestaan die voldoet aan

$$h(u) \circ f = m \text{ voor alle } u \in U \quad (1.1)$$

We weten door stelling ?? en ?? dat S en T compact en Hausdorff zijn. Aangezien f surjectief is, is het een quotientafbeelding.

Bovendien, merken we op dat $T \times_S T = \{(t_1, t_2) \in T \times T \mid f(t_1) = f(t_2)\}$. Voor alle $t_1, t_2 \in T$ met $f(t_1) = f(t_2)$ zien we dus dat

$$m(u)(t_1) = (\pi_1^* \circ m)(u)(t_1, t_2) = (\pi_2^* \circ m)(u)(t_1, t_2) = m(u)(t_2).$$

Door de universele eigenschap van quotientafbeeldingen, bestaat er een unieke continue afbeelding $h(u) : S \rightarrow A$ die aan (1.1) voldoet. $\square$

Nu is het mogelijk om $\underline{A}$ te evalueren in verschillende pro-eindige verzamelingen die we al gezien hebben.

Voorbeeld 1.13. Bij het meest eenvoudige voorbeeld $\{*\}$ zien we dat $\underline{A}(\{*\}) = \text{Cont}(\{*\}, A) \cong A$.

Voorbeeld 1.14. Een interessanter voorbeeld is $\mathbb{N}^\infty$. We zien dat dat

$$\underline{A}(\mathbb{N}^\infty) = \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, A) = \{\text{Convergente rijen in } A \text{ met een limietpunt}\}.$$

We zien namelijk dat als $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \subset \text{Cont}(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ dat voor alle open omgevingen U van x_∞ er een N bestaat zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $x_n \in U$. Dit betekent in andere woorden dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naar x_∞ convergeert. We kunnen dus zeggen dat $\underline{A}(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ de verzameling is van alle convergerende rijen in A , samen met een limietpunt. De nadruk ligt hier op “een”, omdat in een niet-Hausdorff ruimte een rij meerdere limietpunten kan hebben. Het limietpunt wordt dus niet helemaal bepaald door de rij.

Het blijkt dat het voorbeeld die we in sectie 1 gezien hebben ook geconstrueerd kan worden uit een topologie. De singleteton gecondenseerde verzameling is namelijk gelijk aan $\{*\}$.

We zien nu dat alle voorbeelden van gecondenseerde verzamelingen die wij net gegeven hebben een geconjugeerd analagon zijn van een topologie. Nu is het een interessante vraag of het mogelijk is om iedere gecondenseerde verzameling te schrijven als een geconjugeerd analagon van een topologie. Dit blijkt niet zo te zijn. Stel namelijk dat $X = \underline{A}$ voor een topologische ruimte A . Dan zien we dat als $X(\{*\}) = \{*\}$, dat $A = \{*\}$, dus geldt er voor alle pro-eindige S dat $X(S) = \text{Cont}(S, \{*\}) = \{*\}$. Het is dus voldoende om te laten zien dat er een gecondenseerde verzameling X bestaat zodanig $X(\{*\}) = \{*\}$ en $X(S) \neq \{*\}$ voor een pro-eindige S .

Voorbeeld 1.15. We zullen nu een voorbeeld geven van een gecondenseerde verzameling dat niet gelijk is aan een geconstrueerd analagon van een topologie. We zullen hier $\mathbb{R}^{\text{Discr}}(S) = \text{Cont}(S, \mathbb{R}^{\text{Discr}})$ en $\mathbb{R}(S) = \text{Cont}(S, \mathbb{R})$ voor een willekeurige pro-eindige S beschouwen als abelse groepen. Merk op dat $\mathbb{R}^{\text{Discr}}$ een grotere topologie is dan $\mathbb{R}$, dus zien we dat $\text{Cont}(S, \mathbb{R}^{\text{Discr}}) \subset \text{Cont}(S, \mathbb{R})$. Dit betekent ook dat $\text{Cont}(S, \mathbb{R}^{\text{Discr}})$ een ondergroep is van $\text{Cont}(S, \mathbb{R})$. Dit maakt het mogelijk om de gecondenseerde verzameling X te definiëren als

$$X(S) := \mathbb{R}(S) / \mathbb{R}^{\text{Discr}}(S) = \text{Cont}(S, \mathbb{R}) / \text{Cont}(S, \mathbb{R}^{\text{Discr}}).$$

en

$$X(f) := [g] \mapsto [g \circ f]$$

voor een afbeelding $f : T \rightarrow S$ tussen pro-eindige verzamelingen. We zien dan dat $X(\{*\}) = \mathbb{R}(\{*\}) / \mathbb{R}^{\text{Discr}}(\{*\}) \cong \mathbb{R} / \mathbb{R} = \{*\}$. We weten dat een rij alleen convergeert in $\mathbb{R}^{\text{Discr}}$ als het op een gegeven moment constant wordt. We zien dus dat $\text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, \mathbb{R}^{\text{Discr}}) \neq \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, \mathbb{R})$ en daarom zien we dat

$$X(\mathbb{N}^\infty) = \mathbb{R}(\mathbb{N}^\infty) / \mathbb{R}^{\text{Discr}}(\mathbb{N}^\infty) \neq \{*\}$$

Hieruit volgt dat X onmogelijk gelijk kan zijn aan een gecondenseerd analagon van een topologie.

1.3 De topologische benaderingsfunctor

We zullen nu bewijzen dat de gecondenseerde analogonsfunctor een links geadjungeerde heeft. Hiervoor moeten we een functor construeren van Cond naar Top . We zagen in voorbeeld 1.13 dat $\underline{A}(\{*\}) = A$. Een goede kandidaat voor de linksgeadjungeerde is dus $X \mapsto X(\{*\})$. Het enige probleem is dat deze functor naar Set afbeeldt en geen informatie bevat over de topologie. We zullen dus een topologie moeten definiëren op $X(\{*\})$.

Definitie 1.16. We zullen nu de een functor $\bullet_{\text{Top}} : \text{Cond} \rightarrow \text{Top}$ definiëren. Voor een gecondenseerde verzameling X definiëren we X_{Top} als $X(\{*\})$ met de volgende quotienttopologie:

$$\bigsqcup_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty \xrightarrow{\beta_{\{*\}}} X(\{*\}).$$

We kunnen dit ook formuleren als de kleinste topologie zodanig dat $\beta_{\{*\}}$ voor alle $\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)$ continu is. Voor twee gecondenseerde verzamelingen X en Y en een natuurlijke transformatie $f : X \rightarrow Y$ definiëren we $f_{\text{Top}} = f_{\{*\}}$.

We moeten nu alleen nog wel bewijzen dat de topologische benaderingsfunctor goed gedefinieerd is.

Propositie 1.17. Voor $f \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(X, Y)$ geldt dat f_{Top} continu is.

Bewijs. Neem $f \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(X, Y)$. Door de universele eigenschap van de quotienttopologie is f_{Top} continu dan en slechts dan als $f \circ \bigsqcup \beta_{\{*\}}$ continu is. Als het ons lukt om een continue afbeelding

$$\nu : \bigsqcup_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty \rightarrow \bigsqcup_{\gamma \in Y(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty$$

te definiëren zodat

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty & \xrightarrow{\bigsqcup \beta_{\{*\}}} & X(\{*\}) \\ \downarrow \nu & & \downarrow f_{\text{Top}} \\ \bigsqcup_{\gamma \in Y(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty & \xrightarrow{\bigsqcup \gamma_{\{*\}}} & Y(\{*\}) \end{array}$$

commuteert, dan zien we dat f_{Top} continu is. Om de notatie makkelijker te maken zullen we de componenten van $\bigsqcup_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty$ en $\bigsqcup_{\gamma \in Y(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty$ respectievelijk indexeren als $\left(\left\{ \mathbb{N}_\beta^\infty \right\}_{\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)} \right)$ en $\left(\left\{ \mathbb{N}_\gamma^\infty \right\}_{\gamma \in Y(\mathbb{N}^\infty)} \right)$. Merk op dat $f \circ \beta \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(\mathbb{N}^\infty, Y)$. Dus kunnen we ν definëren als

$$\nu|_{\mathbb{N}_\beta^\infty}(n) = n \in \mathbb{N}_{f \circ \beta}^\infty.$$

Om te laten zien dat ν continu is, is het voldoende om te laten zien dat $\nu|_{\mathbb{N}_\beta^\infty}$ continu is voor alle $\beta \in X(\mathbb{N}^\infty)$. We zien dat voor een open $U \in \bigsqcup_{\gamma \in X(\mathbb{N}^\infty)} \mathbb{N}^\infty$ geldt dat $\nu|_{\mathbb{N}_\beta^\infty}^{-1}(U) = \mathbb{N}_{f \circ \beta}^\infty \cap U \subset \mathbb{N}_\beta^\infty$. Daarnaast zien we dat

$$\begin{aligned} \left(\bigsqcup \gamma_{\{*\}} \circ \nu \right)|_{\mathbb{N}_\beta^\infty} &= \bigsqcup \gamma_{\{*\}} \circ \nu|_{\mathbb{N}_\beta^\infty} &&= \bigsqcup \gamma_{\{*\}} \circ (\mathbb{N}_\beta^\infty \ni n \mapsto n \in \mathbb{N}_{f \circ \beta}^\infty) \\ &= (f \circ \beta)_{\{*\}} &&= (f_{\{*\}} \circ \beta_{\{*\}}) \\ &= (f_{\text{Top}} \circ \beta_{\{*\}}) &&= (f_{\text{Top}} \circ \bigsqcup \beta_{\{*\}})|_{\mathbb{N}_\beta^\infty} \end{aligned}$$

dus zien we dat $\bigsqcup \gamma_{\{*\}} \circ \nu = f_{\text{Top}} \circ \bigsqcup \beta_{\{*\}}$ en dus is f_{Top} continu. $\square$

Het zal nu blijken dat de topologische benaderingsfunctor een linksgeadjungeerde is van de gecondenseerde analogonsfunctor.

Stelling 1.18. *De functor*

$$X \mapsto X(*)_{\text{top}}$$

is een linkse adjunctie van $A \mapsto \underline{A}$

Bewijs. Hiervoor definiëren we de isomorfisme

$$\alpha : \text{Hom}_{\text{Cond}}(-, \underline{\quad}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Top}}(-_{\text{top}}, -)$$

als

$$\alpha_{X,Y}(f) = f_{\{*\}}.$$

Continuïteit van $\alpha_{X,Y}(f)$: Als eerste zullen we bewijzen dat $f_{\{*\}}$ continu is voor alle $f \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(-, \underline{\quad})$.

Door de universele eigenschap van de quotient topologie is het voldoende om te bewijzen dat $f_{\{*\}} \circ \left(\bigsqcup_{\beta \in X(S)} \beta_{\{*\}} \right)$ continu is. Door de universele eigenschap van het co-product is het voldoende om te bewijzen dat $f_{\{*\}} \circ \beta_{\{*\}}$ continu is voor alle $\beta \in X(S)$. Door 1.7 zien we dat

$$\text{Cont}(S, Y) = \underline{Y}(S) = \text{Hom}(\underline{S}, \underline{Y})$$

. We zien dat $f \circ \beta \in \text{Hom}(\underline{S}, \underline{Y})$, dus we zien dat $f_{\{*\}} \circ \beta_{\{*\}} \in \text{Cont}(\underline{S}, \underline{Y})$. Hierdoor zien we dat $f_{\{*\}}$ continu is.

α is een natuurlijke transformatie: Om te bewijzen dat α natuurlijke transformatie is, moeten we aantonen dat de volgende diagram commuteert voor alle $f : X_1 \rightarrow X_2$ en $g : Y_1 \rightarrow Y_2$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{\text{Cond}}(X_1, \underline{Y_1}) & \xrightarrow{\alpha_{X_1, Y_1}} & \text{Hom}_{\text{Top}}(X_1(*), Y_1) \\
\uparrow - \circ f & & \uparrow - \circ f_{\{*\}} \\
\text{Hom}_{\text{Cond}}(X_2, \underline{Y_1}) & \xrightarrow{\alpha_{X_2, Y_1}} & \text{Hom}_{\text{Top}}(X_2(*), Y_1) \\
\downarrow g_* \circ - & & \downarrow g \circ - \\
\text{Hom}_{\text{Cond}}(X_2, \underline{Y_2}) & \xrightarrow{\alpha_{X_2, Y_2}} & \text{Hom}_{\text{Top}}(X_2(*), Y_2)
\end{array} \cdot \quad (1.2)$$

Zij $h \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(X_2, \underline{Y_1})$, dan moeten we bewijzen dat

$$h_{\{*\}} \circ f_{\{*\}} = (h \circ f)_{\{*\}} \quad (1.3)$$

en dat

$$g \circ h_{\{*\}} = (g_* \circ h)_{\{*\}}. \quad (1.4)$$

Hierbij is (1.3) per definitie waar en (1.4) volgt uit het feit dat

$$(g_*)_{\{*\}} = (* \mapsto y_1) \mapsto (* \mapsto g(y_1)) \simeq y_1 \mapsto g(y_1) = g.$$

Bijektiviteit van α : Om te bewijzen dat α bijectief is, moeten we bewijzen dat $\alpha_{X,Y}$ bijectief is voor alle X, Y . We definiëren $\alpha_{X,Y}$, waarbij S een pro-eindige verzameling is, $\beta \in X(S)$ en $s \in S$ als volgt:

$$\alpha_{X,Y}^{-1}(f)_S(\beta)(s) := f \circ X(* \mapsto s)(\beta).$$

Nu zullen we aantonen dat $\alpha_{X,Y}^{-1}$ daadwerkelijk de inverse is van $\alpha_{X,Y}$. We zien dat

$$\left(\alpha_{X,Y} \circ \alpha_{X,Y}^{-1} \right) (g)(\beta) = \alpha_{X,Y}^{-1}(g)_{\{*\}}(\beta) = *' \mapsto g \circ X(* \mapsto *')(\beta) \simeq g \circ X(\text{Id}_{\{*\}})(\beta) \quad (1.5)$$

$$= g \circ \text{Id}_{X(\{*\})}(\beta) = g(\beta). \quad (1.6)$$

De omgekeerde richting is wat lastiger te bewijzen. Aangezien voor $f \in \text{Hom}_{\text{Cond}}(X, \underline{Y})$ geldt dat f een morfisme is tussen functoren, dus voldoet het aan commutatiediaagram (1.1).

$$f_S(\beta)(s) \simeq f_S(\beta) \circ (* \mapsto s) = (f_{\{*\}} \circ X(* \mapsto s))(\beta) = (\alpha_{X,Y}^{-1} \circ \alpha_{X,Y})(f)_S(\beta)(s)$$

□

1.4 Sequentiele ruimtes

Definitie 1.19. Zij X een topologische ruimte en $A \subset X$. Dan is A **sequentieel gesloten** dan en slechts als voor elke convergerende rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ geldt dat alle limietpunten zich in A bevinden.

Hieruit is het mogelijk om de topologische eigenschap van een sequentiele ruimte te definiëren.

Definitie 1.20. [?] Een topologische ruimte X is **sequentieel** als voor alle $A \subset X$ geldt dat A gesloten is dan en slechts dan als A sequentieel gesloten is.

Het is ook mogelijk om een willekeurige topologische ruimte sequentieel te maken door alle sequentieel gesloten verzamelingen gesloten te maken.

Definitie 1.21. Voor een topologische ruimte X definiëren we de **sequentialisatie** x^{Seq} , waarbij $A \subset x^{\text{Seq}}$ gesloten is dan en slechts dan als A sequentieel gesloten is in X .

We zullen nu zien dat dit een nieuwe topologie oplevert.

Propositie 1.22. *De sequentialisatie van een willekeurige topologische ruimte X is een goed gedefinieerde topologie.*

Bewijs. Zij X een topologische ruimte. We laten zien dat X^{Seq} ook een topologische ruimte is.

- (i) Dat $\emptyset$ en X sequentieel gesloten zijn is triviaal.
- (ii) Stel nu dat $(A_i)_{i \in I} \subset X$ een collectie sequentieel gesloten verzamelingen zijn. Neem nu een convergerende rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigcap_{i \in I} A_n$. Aangezien A_i voor alle $i \in I$ sequentieel gesloten is zien we dat het alle limietpunten van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bevat. Dus zien we dat $\bigcap_{i \in I} A_n$ alle limietpunten van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bevat en daardoor zien we dat $\bigcap_{i \in I} A_n$ sequentieel gesloten is.
- (iii) Zij nu A_1 en A_2 twee sequentieel gesloten verzamelingen. Stel nu dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_1 \cup A_2$. We weten zonder verlies van algemeenheid dat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een deelrij $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in A_1$ heeft. Aangezien A_1 sequentieel gesloten is en omdat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dezelfde limietpunten hebben zien we dat alle limietpunten bevat zijn in A_1 en dus ook in $A_1 \cup A_2$. We kunnen dus concluderen dat $A_1 \cup A_2$ sequentieel gesloten is.

□

Uit de topologie weten we dat elke gesloten verzameling sequentieel gesloten is. Ook is het zo dat in eerst-aftelbare ruimtes een sequentieel gesloten verzameling altijd gesloten is. Hieruit volgt dat alle eerst-aftelbare ruimtes sequentiele ruimtes zijn. Een voorbeeld van een ruimte dat niet sequentieel is, is de co-aftelbare verzameling. Dit zou betekenen dat de co-aftelbare verzameling sequentieel gesloten verzamelingen bevat die niet gesloten zijn. Sterker nog, we zullen zien dat in de co-aftelbare ruimte alle verzamelingen sequentieel gesloten zijn.

Voorbeeld 1.23. Zij X een verzameling met de co-aftelbare topologie. Dan geldt voor alle $A \subset X$ dat A sequentieel gesloten is. Zij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ een convergente rij en x zijn limiet. We zien dat $X \setminus \{x_n | x_n \neq x, n \in \mathbb{N}\}$ een open omgeving is van x . Dus bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n' \geq N$ geldt dat $x_n \in X \setminus \{x_n | x_n \neq x, n \in \mathbb{N}\}$, oftewel dat $x_{n'} \neq x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ waarbij $x_n \neq x$. Dus moet er gelden dat $x = x_{n'}$ voor alle $n \geq N$. We zien nu dus dat $x \in A$.

Sequentiele topologieën zijn belangrijk wanneer we praten over gecondenseerde verzamelingen die geïnduceerd zijn door topologieën. Het blijkt namelijk zo te zijn dat $\underline{A}_{\text{Top}}$ gelijk is aan A in Top dan en slechts dan als A sequentieel is. Het is ook mogelijk om nog een sterkere uitspraak te geven. Het blijkt namelijk zo te zijn dat $\underline{A}_{\text{Top}}$ gelijk is aan de topologie van sequentiele gesloten verzamelingen van A , oftewel $\underline{A}_{\text{Top}} = A^{\text{Seq}}$.

Stelling 1.24. *Zij A een topologische ruimte. Dan geldt er dat $\underline{A}_{\text{Top}} = A^{\text{Seq}}$.*

Voordat we dit kunnen bewijzen moeten we eerst wat lemma's bewijzen.

Lemma 1.25. *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. $B \subset A$ is sequentieel gesloten.
2. Voor iedere continue afbeelding $f : \mathbb{N}^\infty \rightarrow A$ geldt dat $f^{-1}(B)$ gesloten is.

Bewijs.

- (1) $\implies$ (2) Stel dat $B \subset A$ sequentieel gesloten is en zij $f : \mathbb{N}^\infty \rightarrow A$ continu. Zeggen dat $f : \mathbb{N}^\infty \rightarrow A$ continu is, is equivalent aan zeggen dat $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert naar $f(\infty)$. Nu kijken we naar twee gevallen:

$f(\infty) \in B$ Stel eerst dat $f(\infty) \in B$. Dan zien we dat dat $\infty \in f^{-1}(B)$ en dus geldt er dat het complement van $f^{-1}(B)$ alleen bestaat uit elementen van $\mathbb{N}$, dus is het complement open en $f^{-1}(B)$ dus gesloten

$f(\infty) \notin B$ Stel nu dat $f(\infty) \notin B$. Stel nu dat $f^{-1}(B)$ oneindig veel elementen heeft. Dan zou dit betekenen dat $(f(n))_{n \in f^{-1}(B)}$ een rij is die volledig in B bevat is. Aangezien B sequentieel gesloten is mag $(f(n))_{n \in f^{-1}(B)}$ niet naar een element buiten B convergeren. Dit is een tegenspraak met dat $f(\infty) \notin B$ limiet is van $(f(n))_{n \in f^{-1}(B)}$. Dit betekent dat $f^{-1}(B) \subset \mathbb{N}$ eindig is en dus gesloten.

$\neg(1) \implies \neg(2)$ Stel nu dat $B \subset A$ niet sequentieel gesloten is. Dit betekent dat er een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ bestaat waarbij $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A \setminus B$. Definieer nu $f : \mathbb{N}^\infty \rightarrow A$ als $f(n) = x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Aangezien $(f(n))_n \in \mathbb{N}$ naar $f(\infty)$ convergeert zien we dat f continu is. Tegelijkertijd zien we dat $f^{-1}(B) = \mathbb{N}$ en dus is $f^{-1}(B)$ niet gesloten.

□

Nu kunnen we stelling 1.24 gaan bewijzen

Bewijs van stelling 1.24. Aangezien $\underline{A}_{\text{Top}}$ de volgende quotiënt topologie heeft:

$$\bigsqcup_{f \in \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, A)} \mathbb{N}^\infty \xrightarrow{f} A$$

is zeggen dat $B \subset \underline{A}_{\text{Top}}$ gesloten is equivalent aan zeggen dat $\left(\bigsqcup_{f \in \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, A)} f\right)^{-1}(B)$ gesloten is. Dit is weer equivalent aan zeggen dat $f^{-1}(B)$ gesloten is voor alle $f \in \text{Cont}(\mathbb{N}^\infty, A)$. Wegens lemma 1.25 is dit equivalent met zeggen dat $B \subset A$ sequentieel gesloten is. We zien dat de gesloten verzamelingen overeenkomen met de sequentieel gesloten verzamelingen, dus kunnen we zeggen dat $\underline{A}_{\text{Top}} = A^{\text{Seq}}$. □

Gevolg 1.26. Zij A een topologische ruimte. Dan geldt er dat $\underline{A}_{\text{Top}} = A$ dan en slechts dan als A een sequentiele ruimte is.

Bewijs. Zeggen dat $\underline{A}_{\text{Top}} = A$ is equivalent aan zeggen dat $A^{\text{Seq}} = A$. Dit is weer equivalent aan dat A een sequentiele ruimte is. □

Voorbeeld 1.27. Voor elke verzameling X noteren we X^{cc} als X met de co-aftelbare topologie en X^{Dis} als X met de discrete topologie. Er geldt dan dat

$$\underline{X^{\text{cc}}}_{\text{Top}} = (X^{\text{cc}})^{\text{Seq}} = X^{\text{Dis}}.$$

De laatste gelijkheid volgt uit voorbeeld 1.23.

Als we nu Seq definiëren als de volle deelcategorie van Top van alle sequentie ruimten. Dan geldt er dat de restrictie van de gecondenseerde analagon functor op Seq fully faithful is. Om dit te bewijzen zullen we de volgende uitspraak bewijzen:

Stelling 1.28. De volgende twee uitspraken zijn equivalent voor alle topologische ruimten X :

(i) Voor alle topologische ruimten Y geldt dat de volgende afbeelding een isomorfisme is:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y}) \\ f &\mapsto f_* \end{aligned}$$

(ii) X is een sequentiele ruimte

Bewijs. Door stelling 1.18 weten we dat $\text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y})$ isomorf is aan $\text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{X}_{\text{Top}}, Y)$. Door gevolg 1.26 weten we dat $\text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{X}_{\text{Top}}, Y)$ isomorf is aan $\text{Hom}_{\text{Top}}(X^{\text{Seq}}, Y)$. We krijgen nu het volgende commutatiediaagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) & \xrightarrow{f \mapsto f_*} & \text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y}) \\ & \searrow \iota & \downarrow \alpha_{\underline{X}, Y} \\ & & \text{Hom}_{\text{Top}}(X^{\text{Seq}}, Y) \end{array}$$

Merk op dat aangezien $\alpha_{\underline{X}, Y}$ bijectief is, het voldoende is om te laten zien dat ι bijectief is. We zullen nu laten zien dat ι de inclusie is. We zien namelijk dat

$$\iota(f)(x) \cong \alpha_{\underline{X}, Y}(f_*)(* \mapsto x) = f \circ (* \mapsto x) = * \mapsto f(x) \cong f(x),$$

dus is ι inderdaad de inclusie. Nu zullen we laten zien dat uitspraken (i) en (ii) equivalent zijn aan elkaar:

- (i) $\implies$ (ii) Stel dat $f \mapsto f_* : \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y})$ bijectief is voor alle topologische ruimte Y . Dan weten we dat ι ook bijectief is. Kies nu $Y = X^{\text{Seq}}$. We weten dat $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X^{\text{Seq}}, X^{\text{Seq}})$. Aangezien ι bijectief is zien we dat $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, X^{\text{Seq}})$. We zien dus dat alle sequentieel gesloten verzamelingen van X gesloten zijn in X , dus moet X sequentieel zijn.
- (ii) $\implies$ (i) Stel nu dat X sequentieel is, oftewel dat $X = X^{\text{Seq}}$. We zien dan dat voor we willekeurige Y geldt dat de inclusie $\iota = \text{Id}_{\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)}$ en dus is ι een isomorfisme, waaruit volgt dat $f \mapsto f_*$ ook een isomorfisme is.

□

Hieruit volgt direct dat de gecondenseerde analogonsfunctor fully faithful is op alle sequentiele topologieën.

Gevolg 1.29. *De gecondenseerde analogonsfunctor met restrictie op de categorie van sequentiele topologieën is fully faithful.*

Bewijs. Zij X, Y twee sequentiele topologieën. Dan zien wegens stelling 2.38 dat

$$\begin{array}{c} \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Cond}}(\underline{X}, \underline{Y}) \\ f \mapsto f_* \end{array}$$

bijectief is.

□