

Compacte ruimtes

Thomas van Maaren

24 mei 2024

Hoofdstuk 1

Oorspronkelijke tekst

In de topologie zijn we heel vaak bezig met kijken of twee verschillende ruimtes homeomorf zijn. Ook is het belangrijk om te kunnen zien wanneer twee ruimtes niet homeomorf aan elkaar zijn. Zo zijn het gesloten interval $[0, 1]$ en de reële getallen niet homeomorf. In velen van deze gevallen kan compactheid ons hiermee helpen. Compactheid is namelijk een topologische eigenschap. Dit betekent dat als twee ruimtes homeomorf zijn, dat beide ruimtes allebei compact moeten zijn of allebei niet. Later in deze tekst zullen we zien dat $[0, 1]$ compact is en de reële getallen dat niet zijn. Daarom kunnen ze onmogelijk homeomorf zijn.

Ook hebben compacte verzamelingen nog andere interessante eigenschappen. Stel namelijk dat een continue functie een compact domein heeft en een Hausdorff co-domein. Dan geldt er dat de inverse ook continu is.

Voordat we hier naar kijken moeten we eerst compacte ruimtes definiëren. Wat zal blijken is dat het vanuit deze definitie vrij moeilijk te zien is welke ruimtes compact zijn en welke niet. Daarom zullen we ook nog wat eigenschappen bewijzen over compacte ruimtes. Dit zal ons een karakterisatie geven van compacte ruimtes in de reële getallen, waardoor het vrijwel meteen te zien is of een ruimte compact is of niet.

1.1 De definitie van compactheid

Voordat we compacte ruimtes kunnen definiëren moeten we eerst kijken naar open dekkingen.

Definitie 1 (Open dekking). We definiëren een open dekking als een collectie opens die samen de hele verzameling vormt.

De collectie $\{[0, 2/3), (1/3, 1]\}$ is bijvoorbeeld een open dekking van $[0, 1]$, omdat alle twee de verzamelingen open zijn en ze samen $[0, 1]$ vormen.

Definitie 2 (Compactheid). We noemen een ruimte compact, als we uit alle open dekkingen een eindige deelcollectie kunnen nemen, die ook een open dekking is.

Op deze manier zien we dat alle eindige verzamelingen compact zijn, aangezien elke open dekking daarop eindig is. Ook kunnen we zien dat de reële getallen niet compact zijn. Hiervoor moeten we een open dekking vinden van de reële getallen, die geen eindige deelcollectie heeft, dat alle reële getallen dekt. Kijk bijvoorbeeld naar de collectie van begrensde open verzamelingen. Stel dat we van deze collectie een eindige deelcollectie nemen. Aangezien het alleen uit begrensde verzamelingen bestaat, is de vereniging van de collectie ook begrensd, en kan het niet alle reële getallen overdekken. We zien dus dat onze collectie geen eindige deelcollectie heeft, die een open dekking vormt. Daardoor kunnen we concluderen dat de reële getallen niet compact zijn. Sterker nog: elke onbegrensde verzameling in de reële getallen is niet compact. Neem net als bij reële getallen de collectie van begrensde opens. Een eindige deelcollectie hiervan heeft een begrensd vereniging en dus kan het nooit de hele ruimte bevatten.

Het blijkt zo te zijn, dat er in de reële getallen een hele eenvoudige karakterisatie bestaat van compacte verzamelingen. Er geldt namelijk dat een verzameling alleen compact is als het begrensd en gesloten is. Dit

rijmt ook met onze eerdere observatie dat de reële getallen niet compact zijn.

1.2 Eigenschappen van compactheid

Vaak is het erg moeilijk om uit de definitie te zien of een ruimte compact is of niet. Om dit makkelijker te maken kan het helpen om wat eigenschappen van topologische ruimten te bewijzen.

propositie 3. *Compacte verzamelingen in $\mathbb{R}$ zijn begrensd.*

Bewijs. We hadden al gezien dat onbegrensde deelverzamelingen van reële getallen niet compact kunnen zijn, dus weten we dat alle compacte verzamelingen in de reële getallen begrensd zijn. $\square$

propositie 4. *Compactheid wordt behouden onder homeomorfismes.*

Bewijs. Stel dat A en B twee homeomorfe topologische ruimten zijn en dat A compact is. We zullen nu laten zien dat B ook compact is. Stel namelijk dat we een open dekking hebben van B . Dan kunnen we deze dekking via de homeomorfisme naar A sturen. Doordat we weten dat A compact is kunnen we hier een eindige deelcollectie van nemen die heel A dekt. Als we deze weer terug sturen naar B via dezelfde homeomorfisme zien we dat we een eindige deelcollectie hebben die heel B dekt, dus zien we dat B ook compact moet zijn. $\square$

propositie 5. *Gesloten deelverzamelingen van compacte ruimtes zijn compact.*

Bewijs. Stel dat X compact is en dat A een gesloten deelruimte is van X . Stel nu dat we een open dekking hebben van A en daar het complement van A aan toevoegen. Deze is open omdat het complement van een gesloten verzameling open is. Nu hebben we dus een open dekking van X . Aangezien X compact is, bestaat er een eindige deelcollectie hiervan die heel X dekt en dus ook A . Dus zien we dat A compact moet zijn. $\square$

propositie 6. *Alle compacte verzamelingen in een Hausdorff verzameling zijn Gesloten.*

Bewijs. Als laatste is het ook zo dat elke compacte ruimte in een Hausdorff ruimte gesloten is. Stel namelijk dat X Hausdorff is en A een compacte deelruimte is van X . Neem nu een punt $x \in X \setminus A$. Doordat X Hausdorff is weten we dat voor alle punten y in A er open omgevingen van x en y bestaan die elkaar niet overlappen. Als we al deze open omgevingen bekijken van de verschillende y hebben we een open dekking van A en omdat A compact is moet er een eindige deelcollectie hiervan bestaan die heel A dekt. Voor al deze opens bestaat er een corresponderende open omgeving van x die niet overlapt, dus als we nu de doorsnede nemen van al deze opens van x krijgen we een open die helemaal buiten de eindige dekking van A ligt en dus ook buiten A zelf. We zien nu dus dat voor elk punt buiten A er een open omgeving is die buiten A ligt en als we hier de vereniging van nemen zien we dat het complement van A open is, dus is A gesloten. $\square$

1.3 Karakterisatie van compacte verzamelingen in de reële getallen

We weten dat $\mathbb{R}$ een Hausdorff ruimte is. Dus weten we dat alle compacte verzamelingen gesloten zijn. Ook weten we dat alle compacte verzamelingen in de reële getallen begrensd zijn, dus zijn alle compacte verzamelingen in de reële getallen gesloten en begrensd.

Nu is het een interessante vraag of alle gesloten en begrensde verzamelingen compact zijn. Het lijkt misschien moeilijk om te zien of dit waar is of niet. Om het makkelijker voor ons te maken kunnen we naar de eigenschappen kijken die we eerder bewezen hebben. Stel nu dat A gesloten en begrensd is en er een compacte verzameling $B \supset A$ bestaat, dan weten we door de eigenschappen, dat A compact moet zijn. Aangezien A begrensd is kunnen we zeggen dat $B = [a, b]$ waarbij a kleiner is dan alle elementen van A en b groter is dan alle elementen van A . Nu hoeven we dus alleen te bewijzen dat $[a, b]$ compact is. Hiervoor

kunnen we nog een andere eigenschap gebruiken die we bewezen hebben. Aangezien $[a, b]$ homeomorf is aan $[0, 1]$ kunnen we zeggen dat als $[0, 1]$ compact is, dat $[a, b]$ dat ook moet zijn.

Lemma 7. *Compactheid van $[0, 1]$*

Bewijs. Stel namelijk dat we een open dekking hebben van $[0, 1]$. We willen nu laten zien dat er een eindige deelcollectie hiervan is die ook heel $[0, 1]$ dekt. Om dit te doen kijken we naar alle a in $[0, 1]$ waarbij $[0, a]$ gedekt word door een eindige deelcollectie. We weten sowieso dat 0 hieraan voldoet aangezien $[0, 0]$ één punt is. Daarnaast weten we dat a maximaal 1 kan zijn. We kunnen nu het suprenum nemen van al deze a 's en die noemen we b . Stel nu dat $b = 1$. Dan kunnen we een open verzameling U nemen waar 1 in bevat zit. Omdat U open is moet er een $c < 1$ bestaan zodat $[c, 1] \in U$. Omdat $c < b$ weten we dat $[0, c]$ helemaal gedekt wordt door een eindige deelcollectie van onze dekking. Als we hier U aan toevoegen zien we dat we een eindige open dekking hebben van heel $[0, 1]$ en dus is het compact. Het is nu alleen nog de vraag wat er gebeurt als $b < 1$. In dit geval hebben we geen eindige deelcollectie en dus kunnen we niet aantonen dat $[0, 1]$ compact is. Wat blijkt is dat dit geval zich nooit voordoet. Stel namelijk dat $b < 1$, dan bestaat er weer een open U en $c < b < d$ zodat $[c, d] \in U$. Opnieuw geldt er dat $[0, c]$ gedekt werd door een eindige deelcollectie van onze dekking en opnieuw kunnen we hier U aan toevoegen. Deze keer zien we dat $[0, d]$ helemaal gedekt word hierdoor. Onthoud dat we b hadden gedefinieerd als het suprenum van alle a zodat $[0, a]$ gedekt word door een eindige deelcollectie. Aangezien d hier aan voldoet moet $b \geq d$ en dus hebben we een tegenspraak. Hieruit zien we dus dat b altijd 1 moet zijn en dus is $[0, 1]$ compact. $\square$

We kunnen nu dus concluderen dat een verzameling in $\mathbb{R}$ compact is dan en slechts dan als het gesloten en begrensd is.

Stelling 8. *Zij $A \subset \mathbb{R}$, dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

1. A is compact.
2. A is gesloten en begrensd.

Bewijs.

- (i) $\implies$ (ii) Stel dat A compact is. We weten door propositie 3 dat A begrensd is. Aangezien R Hausdorff is weten we door propositie 6 dat A gesloten is.
- (ii) $\implies$ (i) Stel dat A gesloten en begrensd is. Dan bestaat er a, b zodanig dat $A \subset [a, b]$. We weten dat $[a, b]$ homeomorf is met $[0, 1]$, dus is het compact. We zien nu dat A een gesloten deelverzameling is van een compacte verzameling, dus is A compact. $\square$

1.4 Inverse van continue functies

In de topologie zijn we vaak bezig met homeomorfismes opstellen. Onthoud dat een functie een homeomorfisme is, als het bijectief, continu en de inverse continu is. Het laatste hiervan is vaak lastig aan te tonen, omdat het erg moeilijk kan zijn om voor een functie een inverse te bedenken en daarvan te bewijzen dat het continu is. Gelukkig hoeft dit niet altijd. Stel namelijk dat we kijken naar een functie van een compacte ruimte naar een Hausdorff, dan hoeven we alleen te bewijzen dat het bijectief en continu is om te zien dat de inverse ook continu is. ruimte, dan weten we dat de inverse continu is wanneer de functie zelf continu is. Dit zullen we nu bewijzen:

Stelling 9. *Een bijectieve continue functie met een compact domein en een Hausdorff co-domein is een homeomorfisme.*

Bewijs. Stel we hebben namelijk een open in het domein dan is het complement hiervan gesloten. Zoals we eerder zagen zijn alle gesloten verzamelingen in een compacte ruimte compact. Daarnaast weten we dat continue functies compacte verzamelingen sturen naar compacte verzamelingen, dus stuurt onze functie het

complement van een open naar een compacte verzameling. Doordat het co-domein Hausdorff is weten we nu dat dat deze verzameling gesloten is en dus is het complement open. We zien dus dat opens naar opens gestuurd worden. Hierdoor zien we dat de inverse continu is, en aangezien het aan alle andere eigenschappen van homeomorfismes voldoet, is de functie een homeomorfe. $\square$

1.5 Tot Slot

In deze tekst hebben we gezien wat de definitie is van een compacte ruimte. Daarnaast bewezen we vier belangrijke eigenschappen van topologische ruimten. Namelijk dat in de reële getallen een compacte ruimte altijd begrensd, dat het een topologische eigenschap is, dat alle gesloten deelverzamelingen van compacte ruimtes compact zijn en dat alle compacte ruimtes in Hausdorff ruimtes gesloten zijn. Met deze eigenschappen konden we bewijzen dat in de reële getallen, compactheid equivalent is aan het gesloten en begrensd zijn van een verzameling. Als laatste zagen we ook dat compactheid ons kon helpen met het bewijzen dat de inverse van een functie continu is.

Hoofdstuk 2

Alle feedback die ik heb gekregen

2.1 Schrijfopdracht 1

2.1.1 Feedback van Lucas

Je hebt een duidelijke tekst geschreven die leuk is om te lezen. De inleiding maakt goed duidelijk waar je het over gaat hebben en de structuur van de tekst zit goed in elkaar. Door gebruik te maken van verschillende secties is het duidelijk waar een stukje begint en eindigt. Alleen zijn de titels die je hieraan geeft niet heel origineel of veelzeggend. Je hebt handige eigenschappen van compactheid bewezen aan de hand van bewijzen die ik goed te volgen vond.

Ik heb nog een paar tips en opmerkingen. Als eerste tip wil ik meegeven dat je bij het schrijven van een tekst eerst goed nadenkt over je publiek. Aan de ene kant gebruik je in de inleiding makkelijke termen; zo zeg je dat we in topologie kijken naar ruimtes die gelijk zijn i.p.v. dat je iedere keer het begrip homeomorfisme gebruikt. Ook definieer je later het begrip compactheid en nog later vertel je wat een homeomorfisme is. Dit lijkt erop te duiden alsof deze tekst geschreven is voor studenten die nog geen topologie hebben gevolgd. Echter gebruik je in de tekst ook begrippen als open verzamelingen en Hausdorff en de eigenschappen van zulke verzamelingen/ruimtes.

Als laatste nog een paar opmerkingen over de spelling. In je inleiding staat de zin ‘Zo geldt er ... continue inverse hebben’. Deze zin vindt ik niet helemaal lekker lopen. Soms heb je de letter ‘e’ in woorden als compacte of begrensde weggehaald of toegevoegd waar dat niet moet. De notatie $[0, 2/3[,]1/3, 1]$ is een beetje onduidelijk. In de zin ‘Sterker nog: Elk onbegrensde ...’ moet je geen hoofdletter E gebruiken in ‘Elk’. Ook in de titel van paragraaf 4 moet toepassing zonder hoofdletter. In paragraaf 2 heb je het woord ‘bestaat’ met drie a’s geschreven.

2.1.2 Feedback van Duco

Je begint de tekst met een uitgebreide inleiding. Het leest gemakkelijk weg en geeft een goede indruk waar de tekst over gaat. Soms vind ik de zinnen iets te lang en zou een extra komma fijn zijn, zoals in de laatste zin van de tweede alinea. Verder start je in de eerste alinea een zin met: ‘Dit betekent’ en twee zinnen erna met: ‘Dit betekent’. In het stuk over de definitie staan een aantal spelfouten en na een dubbele punt begin je een zin met hoofdletter. Wiskundig gezien vind ik het verder alles wat je schrijft duidelijk. Ik zou het wel prettiger te lezen vinden als je iets meer in wiskundetaal schrijft in plaats van in woorden. Je schrijft wel alles op een manier dat erg prettig is om te lezen. Tot slot zou ik de margins van de pagina iets breder maken, want de zinnen worden soms wel erg lang. 1

2.2 Schrijfopdracht 2

2.2.1 Ruben

Daarom zullen we ook nog wat eigenschappen bewijzen over compacte ruimtes **waardoor het makkelijker te zien is of een ruimte compact is**. Dit zal ons een karakterisatie geven van compacte ruimtes in de reële getallen, **waardoor het vrijwel meteen te zien is of een ruimte compact is of niet**.

Ik denk dat je een van deze twee rode zinnnetjes weg zou kunnen laten, want dit voelt een beetje dubbelop.

Spelling/grammatica

“Ook kunnen we zien dat de reële getallen niet compact is.”

“...geen eindige deelcollectie heet...”

“Ten eerste lijkt het misschien moeilijk om te zien of dit waar is of niet.” (hier had iets als “a priori” of “in eerste instantie” moeten staan)

Sectie 1 in het bijzonder bevat best veel fouten. Probeer langzamer door je tekst heen te gaan wanneer je op spelfouten checkt.

Verder raad ik het gebruik van verwijzende voornaamwoorden en het vermijden van wiskundige symbolen af:

In plaats van

“...eindige deelcollectie van nemen die heel A dekt. Als we deze weer terug sturen naar B via de homeomorfisme...”

Vind ik

“...eindige deelcollectie D van nemen die heel A dekt. Als we D weer terug sturen naar B via φ ...”

net wat formeler/overzichtelijker.

Structuur in de tekst

Mijn voorkeur gaat uit naar het gebruik van onder andere

$\text{\textbf{Definitie}}$, $\text{\textbf{Lemma}}$, $\text{\textbf{Voorbeeld}}$ en $\begin{proof}$ $\end{proof}$

in plaats van alles in lappen tekst zetten. Bijvoorbeeld had ik secties 2.1/2.2/2.3 zelf als lemma’s/stellingen gedaan. Verder doe ik zo veel mogelijk zinnen het liefst op een nieuwe witregel. Doordat alle argumenten van een bewijs dan onder elkaar staan is er veel meer overzicht.

2.2.2 Lucas

Ik zie dat je goed naar mijn vorige feedback hebt gekeken. Vorige keer was het onduidelijk wat de vereiste voorkennis was om het stuk te begrijpen. Ik zie dat je nu de keuze hebt gemaakt dat de lezer bekend is met topologie maar niet of weinig bekend is met het begrip van compactheid. Je bent hierin consistent. Doordat je nieuwe titels voor je paragrafen hebt gekozen, is het heel duidelijk geworden wat waar behandeld wordt. Ik vind je schrijfstijl fijn om te lezen. Hoewel sommige paragrafen een beetje lang zijn, heb ik mij tijdens het lezen is geselecteerd.

2.3 Schrijfopdracht 3

2.3.1 Steijn

De bewijzen waren goed geformuleerd en goed te begrijpen. Ik was soms een beetje verloren met waarom we nou wat deden. het slot en het begin voelden ook vrij overbodig om te lezen en ik vond het raar dat we $[0,1]$ vergeleken met $\mathbb{R}$ in plaats van $(0,1)$. Voor de rest een paar syntax foutjes (2x we bij 3.2 of 3.1 dacht ik)

Hoofdstuk 3

Persoonlijke reflectie

3.1 Wat haal ik uit de feedback tot nu toe

De lessen die ik uit de feedback haal is dat het belangrijk is om consistent te blijven met je doelgroep. In principe wist ik dit al, maar ik had niet verwacht dat dit een uitdaging zou zijn. Daarnaast merkte ik op dat er heel veel spellingsfouten waren. Ook in de tweede ronde was dit het geval.

3.2 Hoe ga ik mijn schrijfvaardigheid verbeteren

Als ik naar de feedback kijk, denk ik dat al het kritiek te reduceren is naar één kernprobleem. Namelijk, dat ik te weinig tijd besteed om goed door te lezen wat ik geschreven heb. Ik heb een relatief lange tekst geschreven en zag het als een prioriteit om zo veel mogelijk op te schrijven. Toen het af was had ik nauwelijks tijd besteed met het opnieuw doorlezen van de tekst en had ik het alleen maar een beetje doorgelezen. Ik heb nu geleerd dat het belangrijk is om de tekst langzaam zin voor zin te lezen. Alleen op deze manier kan ik alle fouten eruit halen en ervoor zorgen dat de tekst van een hoge kwaliteit is.