

Compacte ruimtes

Thomas van Maaren

22 maart 2024

In de topologie zijn we heel vaak bezig met kijken of twee verschillende ruimtes homeomorf zijn. Ook is het belangrijk om te kunnen zien wanneer twee ruimtes niet homeomorf aan elkaar zijn. Zo zijn het gesloten interval $[0, 1]$ en de reële getallen niet homeomorf. In velen van deze gevallen kan compactheid ons hiermee helpen. Compactheid is namelijk een topologische eigenschap. Dit betekent dat als twee ruimtes homeomorf zijn, dat beide ruimtes allebei compact moeten zijn of allebei niet. Later in deze tekst zullen we zien dat $[0, 1]$ compact is en de reële getallen dat niet zijn. Daarom kunnen ze onmogelijk homeomorf zijn.

Ook hebben compacte verzamelingen nog andere interessante eigenschappen. Stel namelijk dat een continue functie een compact domein heeft en een hausdorff co-domein. Dan geldt er dat de inverse ook continu is.

Voordat we hier naar kijken moeten we eerst compacte ruimtes definiëren. Wat zal blijken is dat het vanuit deze definitie vrij moeilijk te zien is welke ruimtes compact zijn en welke niet. Daarom zullen we ook nog wat eigenschappen bewijzen over compacte ruimtes waardoor het makkelijker te zien is of een ruimte compact is. Dit zal ons een karakterisatie geven van compacte ruimtes in de reële getallen, waardoor het vrijwel meteen te zien is of een ruimte compact is of niet.

1 De definitie van compactheid

Voordat we compacte ruimtes kunnen definiëren moeten we eerst kijken naar open dekkingen. We definiëren een open dekking als een collectie opens die samen de hele verzameling vormt. Bijvoorbeeld voor $[0, 1]$ is $\{[0, 2/3), (1/3, 1]\}$ een open dekking omdat alle twee de verzamelingen open zijn en ze samen $[0, 1]$ vormen. We noemen een ruimte compact als we uit alle open dekkingen een eindig deelcollectie kunnen nemen die ook een open dekking is.

Op deze manier zien we dat alle eindige verzamelingen compact zijn, aangezien elke open dekking daarop eindig is. Ook kunnen we zien dat de reële getallen niet compact is. Hiervoor moeten we een open dekking vinden van de reële getallen die geen eindige deelcollectie heet die alle reële getallen dekt. Kijk bijvoorbeeld naar de collectie van begrensde open verzamelingen. Stelt dat we van deze collectie een eindige deelcollectie nemen. Aangezien het alleen uit begrensde verzamelingen bestaat is het ook begrensd kan het niet alle reële getallen overdekken. We zien dus dat onze collectie geen eindige deelcollectie die een open dekking vormt en daardoor kunnen we concluderen dat de reële getallen niet compact zijn. Sterker nog: elk onbegrensde verzameling in de reële getallen is niet compact. Neem net als bij reële getallen de collectie van begrensde opens. Een eindige deelcollectie hiervan heeft een begrensde vereniging en dus kan het nooit de hele ruimte bevatten.

Het blijkt zo te zijn dat er in de reële getallen een hele eenvoudige karakterisatie bestaat van welke verzamelingen compact zijn en welke niet. Er geldt namelijk dat een verzameling alleen compact is als het begrensd en gesloten is. Dit rijmt ook met onze eerdere observatie dat de reële getallen niet compact zijn.

2 Eigenschappen waar compacte verzamelingen aan voldoen

Vaak is het erg moeilijk om uit de definitie te zien of een ruimte compact is of niet. Om dit makkelijker te maken kan het helpen om wat eigenschappen van topologische ruimten te bewijzen. We hadden al gezien dat onbegrensde deelverzamelingen van reële getallen niet compact kunnen zijn, dus weten we dat alle compacte verzamelingen in de reële getallen begrensd zijn.

2.1 Behoud onder homeomorfisme

Compactheid is een topologische eigenschap. Stel namelijk dat A en B twee homeomorfe topologische ruimten zijn en dat A compact is. We zullen nu laten zien dat B ook compact is. Stel namelijk dat we een open dekking hebben van B . Dan kunnen we deze dekking via de homeomorfisme naar A sturen. Doordat we weten dat A compact is kunnen we hier een eindige deelcollectie van nemen die heel A dekt. Als we deze weer terug sturen naar B via de homeomorfisme zien we dat we een eindige deelcollectie hebben die heel B dekt, dus zien we dat B ook compact moet zijn.

2.2 Gesloten deelverzamelingen zijn compact

Nog een interessante eigenschap is dat elke gesloten verzameling in een compacte ruimte compact is. Stel namelijk dat X compact is en dat A een gesloten deelruimte is van X . Stel nu dat we een open dekking hebben van A en daar het complement van A aan toevoegen. Deze is open omdat het complement van een gesloten verzameling open is. Nu hebben we dus een open dekking van X . Aangezien X compact is, bestaat er een eindige deelcollectie hiervan die heel X dekt en dus ook A . Dus zien we dat A compact moet zijn.

2.3 Gesloten in een hausdorff ruimte

Als laatste is het ook zo dat elke compacte ruimte in een hausdorff ruimte gesloten is. Stel namelijk dat X hausdorff is en A een compacte deelruimte is van X . Neem nu een punt $x \in X \setminus A$. Doordat X hausdorff is weten we dat voor alle punten y in A er open omgevingen van x en y bestaan die elkaar niet overlappen. Als we al deze open omgevingen bekijken van de verschillende y hebben we een open dekking van A en omdat A compact is moet er een eindige deelcollectie hiervan bestaan die heel A dekt. Voor al deze opens bestaat er een corresponderende open omgeving van x die niet overlapt, dus als we nu de doorsnede nemen van al deze opens van x krijgen we een open die helemaal buiten de eindige dekking van A ligt en dus ook buiten A zelf. We zien nu dus dat voor elk punt buiten A er een open omgeving is die buiten A ligt en als we hier de vereniging van nemen zien we dat het complement van A open is, dus is A gesloten.

3 Karakterisatie van compacte verzamelingen in de reële getallen

We weten dat $\mathbb{R}$ een hausdorff ruimte is. Dus weten we dat alle compacte verzamelingen gesloten zijn. Ook weten we dat alle compacte verzamelingen in de reële getallen begrensd zijn, dus zijn alle compacte verzamelingen in de reële getallen gesloten en begrensd.

Nu is het een interessante vraag of alle gesloten en begrensde verzamelingen compact zijn. Ten eerste lijkt het misschien moeilijk om te zien of dit waar is of niet. Om het makkelijker voor ons te maken kunnen we naar de eigenschappen kijken die we eerder bewezen hebben. Stel nu dat A gesloten en begrensd is en er een compacte verzameling $B \supset A$ bestaat, dan weten we door de eigenschappen dat A compact moet zijn. Aangezien A begrensd is kunnen we zeggen dat $B = [a, b]$ waarbij a kleiner is dan alle elementen van A en b groter is dan alle elementen van A . Nu hoeven we dus alleen te bewijzen dat $[a, b]$ compact is. Hiervoor kunnen we nog een andere eigenschap gebruiken die we bewezen hebben. Aangezien $[a, b]$ homeomorf is aan $[0, 1]$ kunnen we zeggen dat als $[0, 1]$ compact is, dat $[a, b]$ dat ook moet zijn.

3.1 Compactheid van $[0, 1]$

We hoeven we nu nog alleen te bewijzen dat $[0, 1]$ compact is. Stel namelijk dat we een open dekking hebben van $[0, 1]$. We willen nu laten zien dat er een eindige deelcollectie hiervan is die ook heel $[0, 1]$ dekt. Om dit te doen kijken we naar alle a in $[0, 1]$ waarbij $[0, a]$ gedekt word door een eindige deelcollectie. We weten zowiezo dat 0 hieraan voldoet aangezien $[0, 0]$ één punt is. Daarnaast weten we dat a maximaal 1 kan zijn. We kunnen nu het supremum nemen van al deze a 's en die noemen we b . Stel nu dat $b = 1$. Dan kunnen we een open verzameling U nemen uit onze collectie waar 1 in bevat zit en omdat U open is moet er een $c < 1$ bestaan zodat $[c, 1] \in U$. Omdat $c < b$ weten we dat $[0, c]$ helemaal gedekt wordt door een eindige deelcollectie van onze dekking. Als we hier U aan toevoegen zien we dat we een eindige open dekking hebben van heel $[0, 1]$ en dus is het compact. Het is nu alleen nog de vraag wat er gebeurt als $b < 1$. In dit geval

hebben we geen eindige deelcollectie en dus kunnen we niet aantonen dat $[0, 1]$ compact is. Wat blijkt is dat dit geval zich nooit voordoet. Stel namelijk dat $b < 1$, dan bestaat er weer een open in onze collectie U en $c < b < d$ zodat $[c, d] \subset U$. Opnieuw geldt er dat $[0, c]$ gedekt werd door een eindige deelcollectie van onze dekking en opnieuw kunnen we hier U aan toevoegen. Deze keer zien we dat $[0, d]$ helemaal gedekt wordt hierdoor. Onthoud dat we b hadden gedefinieerd als het supremum van alle a zodat $[0, a]$ gedekt wordt door een eindige deelcollectie. Aangezien d hier aan voldoet moet $b \geq d$ en dus hebben we een tegenspraak. Hieruit zien we dus dat b altijd 1 moet zijn en dus is $[0, 1]$ compact.

4 Inverse van continue functies

In de topologie zijn we vaak bezig met homeomorfismen opstellen. Onthoud dat een functie is homeomorfisme is als het bijectief is, continu en de inverse continu is. Het laatste hiervan is vaak lastig aan te tonen, omdat het erg moeilijk kan zijn om voor een functie een inverse te bedenken en daarvan ook nog te moeten bewijzen dat het continu is. Gelukkig hoeft dit niet altijd. Stel namelijk dat het een functie is van een compacte ruimte naar een hausdorff ruimte, dan weten we dat de inverse continu is wanneer de functie zelf continu is. Dit kunnen we op de volgende manier zien. Stel we hebben namelijk een open in het domein dan is het complement hiervan gesloten. Zoals we eerder zagen zijn alle gesloten verzamelingen in een compacte ruimte compact. Daarnaast weten we dat continue functies compacte verzamelingen sturen naar compacte verzamelingen, dus stuurt onze functie het complement van een open naar een compacte verzameling. Doordat het co-domein hausdorff is weten we nu dat dat deze verzameling gesloten is en dus is het complement open. We zien dus dat opens naar opens gestuurd worden.

5 Tot Slot

In deze tekst hebben we gezien wat de definitie is van een compacte ruimte. Daarnaast bewezen we vier belangrijke eigenschappen van topologische ruimten. Namelijk dat in de reële getallen een compacte ruimte altijd begrensd, dat het een topologische eigenschap is, dat alle gesloten deelverzamelingen van compacte ruimtes compact zijn en dat alle compacte ruimtes in hausdorff ruimtes gesloten zijn. Met deze eigenschappen konden we bewijzen dat in de reële getallen, compactheid equivalent is aan het gesloten en begrensd zijn van een verzameling. Als laatste zagen we ook dat compactheid ons kon helpen met het bewijzen dat de inverse van een functie continu is.