

Coen van Loo, studentnr 1181750

1.34 Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$1.34a \quad (1 + \|x + y\|) \leq (1 + \|x\|)(1 + \|y\|)$$

Te bewijzen valt $(1 + \|x + y\|) \leq (1 + \|x\|)(1 + \|y\|)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

Hiervoor gebruik ik Lemma 1.3a en Lemma 1.3c en het simpel omschrijven van formules.

$$(1 + \|x\|)(1 + \|y\|) = (1 + \|x\|)(1 + \|y\|)$$

Allereerst werken we de haakjes aan de rechterkant weg doormiddel van vermenigvuldiging

$$(1 + \|x\|)(1 + \|y\|) = \|x\|\|y\| + \|x\| + \|y\| + 1$$

Dan gebruiken we de driehoeksongelijkheid (Lemma 1.3c in het dictaat) om $\|x\| + \|y\|$ te schrijven als $\|x + y\|$, merk op dat hierdoor er een ongelijkheid ontstaat.

$$(1 + \|x\|)(1 + \|y\|) \geq \|x\|\|y\| + \|x + y\| + 1$$

Merk op dat de rechterkant van deze ongelijkheid lijkt op de gewenste ongelijkheid van $1 + \|x + y\|$. Het verschil tussen deze twee is een extra $\|x\|\|y\|$ term, Lemma 1.3a vertelt ons dat een norm in $\mathbb{R}^n$ groter of gelijk is aan nul. Daaruit volgt

$$(1 + \|x\|)(1 + \|y\|) \geq \|x\|\|y\| + \|x + y\| + 1 \geq 1 + \|x + y\|$$

Dan volgt alleen nog triviaal omschrijven om de gewenste ongelijkheid te krijgen

$$\begin{aligned} (1 + \|x\|)(1 + \|y\|) &\geq \|x\|\|y\| + \|x + y\| + 1 \geq 1 + \|x + y\| \\ (1 + \|x\|)(1 + \|y\|) &\geq 1 + \|x + y\| \\ (1 + \|x + y\|) &\leq (1 + \|x\|)(1 + \|y\|) \end{aligned}$$

Hierbij heb ik bewezen dat $(1 + \|x + y\|) \leq (1 + \|x\|)(1 + \|y\|)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$1.34b \quad (1 + \|x + y\|) \geq \frac{1 + \|x\|}{1 + \|y\|}$$

Te bewijzen valt dat voor alle x, y uit $\mathbb{R}^n$ geldt $(1 + \|x + y\|) \geq \frac{1 + \|x\|}{1 + \|y\|}$.
hiervoor gebruik ik Lemma 1.3 a en c.

Allereerst beginnen we met de linkerhelft van de te bewijzen vergelijking.

$$1 + \|x + y\| = 1 + \|x + y\|$$

Dan vermenigvuldigen we de vergelijking met een creatieve manier van 1 schrijven, merk op dat we nooit door 0 delen doordat de norm altijd positief is.

$$1 + \|x + y\| = (1 + \|x + y\|) \frac{1 + \|y\|}{1 + \|y\|}$$

Dan werken we de haken weg.

$$1 + \|x + y\| = \frac{1 + \|x + y\| + \|-y\| + \|x + y\|\|-y\|}{1 + \|-y\|}$$

Nu passen we de driehoeksongelijkheid toe. (Lemma 1.3c)

$$1 + \|x + y\| \geq \frac{1 + \|x + y - y\| + \|x + y\|\|-y\|}{1 + \|-y\|}$$

Dan strepen we y tegen zichzelf weg en merken we op dat $\|y\| = \|-y\|$ en gebruiken dat om de onderkant om te schrijven.

$$1 + \|x + y\| \geq \frac{1 + \|x\| + \|x + y\|\|-y\|}{1 + \|y\|}$$

Merk nu op dat de formule een extra term $\|x + y\|\|-y\|$ in de teller heeft. Aangezien de norm altijd positief is (Lemma 1.3a) en de noemer ook alleen uit een norm en 1 bestaat, geeft deze term een positief effect op de uitkomst. Daaruit volgt dat de variant zonder deze term kleiner of gelijk aan de variant met.

$$1 + \|x + y\| \geq \frac{1 + \|x\|}{1 + \|y\|} \geq \frac{1 + \|x\| + \|x + y\|\|-y\|}{1 + \|y\|}$$

Dan halen we de onnodige variant weg en hebben het gewenste resultaat.

$$1 + \|x + y\| \geq \frac{1 + \|x\|}{1 + \|y\|}$$

Hierbij hebben we bewezen dat $1 + \|x + y\| \geq \frac{1 + \|x\|}{1 + \|y\|}$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$