

18 Mark Hengelfmans 7221509

(g) we hebben aangetoond in (d) dat in $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een convergente deeltij heeft. vervolgens bij (e) hebben we laten zien dat wanneer een gewone deeltij convergeert de zij zelf ook naar dit punt $a \in \mathbb{R}^p$ convergeert ofwel iedere Cauchy-zij is convergent in $\mathbb{R}^p = V$. $\square$

9.2

(a) Laat $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, dan $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n > N \Rightarrow d(b_n, b) < \varepsilon/2$

Laat $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = b$, dan $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall m > N \Rightarrow d(b_m, b) < \varepsilon/2$

de driehoeks-ongelijkheid geeft dan dat:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > d(b_n, b) + d(b_m, b)$$

$$\Rightarrow d(b_n, b) + d(b, b_m) \geq d(b_n, b_m)$$

ofwel, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n, m \geq N$ geldt $d(b_n, b_m) < \varepsilon$ dus $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is een Cauchy-zij. $\square$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is een Cauchy-rij.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n, m \geq N$ geldt $d(a_n, a_m) < \varepsilon$

Kies nu $\varepsilon = 1$ en $n = N$, dan volgt er dat

voor $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n, N \geq N$ geldt

dat $d(a_n, a_N) < 1$.

ofwel, $a_n \in B(a_N; 1) = \{a_n \in V \mid d(a_n, a_N) < 1\}$
 $\forall n \geq N$. we kunnen dus concluderen dat
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ begrensd is.

we hebben dat $\exists N \in \mathbb{N}, a_n \in B(a_N; 1), \forall n \geq N$.

neem nu dat $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = b$

laat $R > 0$ en kies $R = d(a_N) + 1$.

we weten dat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij is
dus

$$d(b, a_n) \leq d(b, a_N) + d(a_N, a_n)$$

van (b) weten we dat $d(a_n, a_N) < 1$

Hieruit volgt dat $d(b, a_n) \leq d(b, a_N) + d(a_n, a_N)$

$$< R - 1 + 1 = R$$

(d) $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$.

T.B. $\exists (a_{n_j})_{j \geq 1}$ die convergent is.

St. 4.5 geeft aan dat als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ begrensd is, dan heeft hij een convergente deelrij.

in (c) is bewezen dat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij altijd begrensd is $\Rightarrow$ dus is er altijd een convergente deelrij! $\square$

(e) $\Rightarrow a \in \mathbb{R}^p$, de limit van deelrij $(a_{n_j})_{j \geq 1}$.

$$\text{T.B. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_j}) + d(a_{n_j}, a)$$

$$\text{uit (d)} : d(a_{n_j}, a) < \varepsilon/2$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is een Cauchy-rij, dus weten we dat $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n, m \geq N$ geldt dat $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$.
aangezien een Cauchy-rij altijd begrensd is

Hiervan volgt: $d(a_n, a) < \varepsilon/2, \exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n \geq N$ er geldt dat $\Rightarrow d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_j}) + d(a_{n_j}, a)$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \text{dus } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \square$$

