

- a) Zij $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een convergente rij in de metrische ruimte V . Dan weten we dat er een $b \in V$ bestaat zodat het volgende geldt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N : d(b_n, b) < \varepsilon$. (per def. van een convergerende rij)

Dit geldt dus ook voor een arbitraire $m \geq N$.

We weten dus dat voor alle $n, m \geq N$ geldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : d(b_n, b) < \varepsilon, d(b_m, b) < \varepsilon, \text{ dus}$$

$$\text{ook: } d(b_n, b) + d(b_m, b) < \varepsilon. \text{ Verder weten we}$$

dat V een metrische ruimte is, dus dat $\forall x, y, z \in V$ geldt: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Dus (aangezien

$$b, b_n, b_m \in V) : d(b_n, b_m) \leq d(b_n, b) + d(b, b_m)$$

$$< \varepsilon. \text{ Dus geldt: } \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : d(b_n, b_m) < \varepsilon.$$

- b) Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in een metrische ruimte V . Dan weten we per definitie dat $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N : d(a_n, a_m) < \varepsilon$. Aangezien dit $\forall \varepsilon > 0$ geldt, geldt het ook voor $\varepsilon = 1$. Verder is $N \geq N$, dus geldt:
- $$\exists N \forall n \geq N : d(a_n, a_N) < 1 \Leftrightarrow$$
- $$\exists N \forall n \geq N : a_n \in B(a_N; 1).$$

- c) Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in een metrische ruimte V . Dan weten we uit b) dat $\exists N \forall n \geq N : a_n \in B(a_N; 1)$. Noem nu $R = 1$ en $a_N = b$ dan geldt:
- $$\exists_{\substack{b \in V \\ R > 0}} \forall n \geq N : a_n \in B(b; R).$$

- d) Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$), dan weten we uit c) dat $\exists_{\substack{b \in V \\ R > 0}} \forall n \geq N : a_n \in B(b; R)$,

dus dan is de rij, per definitie begrensd. Verder weten we uit stelling 4.5 dat als een rij begrensd is, dat deze dan een convergente deelrij heeft. ■

e) Zij $a \in \mathbb{R}^p$ de limiet van de genceerde deelrij $(a_{n_j})_{j \geq 1}$.
~~Dit betekent dat $\mathbb{R}^p$ volledig is, dus dat elke Cauchy-rij in $\mathbb{R}^p$ convergeert. Dit volgt uit stelling 4.12 en 4.11. Omdat $a \in \mathbb{R}^p$ is, volgt dat a_{n_j} convergeert naar a . Verder weten we dat $(a_{n_j})_{j \geq 1}$ convergeert naar $a \in \mathbb{R}^p$, dus dat $\forall \varepsilon' > 0 \exists N \forall j \geq N: d(a_{n_j}, a) < \varepsilon'$. Verder weten we dat a_n een Cauchy-rij is, dus $\forall \varepsilon' > 0 \exists N \forall n, m \geq N: d(a_n, a_m) < \varepsilon'$, als $n \geq N$ en $j \geq N$, dan $n_j \geq N$, dus $\forall \varepsilon' > 0 \exists N \forall n, n_j \geq N: d(a_n, a_{n_j}) < \varepsilon'$. Dan weten we uit de driehoeks-ongelijkheid dat $d(a_n, a) \leq d(a_{n_j}, a) + d(a_n, a_{n_j})$. Aangezien het voor alle ε' geldt, nemen we $\varepsilon' = \varepsilon/2$, dan geldt: $d(a_n, a) \leq d(a_{n_j}, a) + d(a_n, a_{n_j}) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, dus per definitie geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. ■~~

f) Volgens stelling 4.12 en 4.11 is $\mathbb{R}^p$ volledig als deze voorzien is van Euclidische metriek (wat zo is, want d is gedefinieerd op $\mathbb{R}^p$) en als iedere Cauchy-rij in $\mathbb{R}^p$ convergent is. Dit hebben we bewezen in e): dat $\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Dus $\mathbb{R}^p$ is volledig. ■