

Analyse inlever 7

Quinten Nijsen

March 2024

Gegeven een differentieerbare functie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $g'(a) < 0$ en $g'(b) > 0$.

- a) Te bewijzen: Zij $r \in \mathbb{R}$ zo dat $g'(a) < r < 0$. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in]a, a + \delta[$ geldt:

$$g(x) < g(a) + r(x - a)$$

Bewijs: Uit de definitie van $g'(a)$ volgt dat

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Dus voor alle $\epsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x \in]a, a + \delta[$ geldt

$$\left\| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - g'(a) \right\| < \epsilon$$

Kies $\delta > 0$ zodanig dat dit geldt. Voor deze δ geldt dan dat, met $x \in]a, a + \delta[$, $g'(a) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$. Verder is gegeven dat $g'(a) < r$. Dus

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) < r$$

Aangezien $(x - a) > 0$, want $x \in]a, a + \delta[$, kunnen we de vorige ongelijkheid herschrijven als

$$g(x) < g(a) + r(x - a)$$

Dus voor alle $x \in]a, a + \delta[$ geldt dat voor deze $\delta > 0$ geldt $g(x) < g(a) + r(x - a)$.

- b) Te bewijzen: Er bestaat een $\delta > 0$, zodanig dat voor alle $x \in]a, a + \delta[$ geldt $g(x) < g(a)$.

Bewijs: Op soortgelijke wijze als voorheen, kies $\delta > 0$ zodanig dat $g'(a) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ voor alle $x \in]a, a + \delta[$. Uit $g'(a) < 0$ volgt dat $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$. Aangezien $x - a > 0$ per definitie, volgt dat $g(x) - g(a) < 0$. Dus $g(x) < g(a)$ voor deze δ .

- c) Te bewijzen: Er bestaat een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x \in]b - \delta, b[$ geldt $g(x) < g(b)$.

Bewijs: Op dezelfde manier als voorheen kiezen we $\delta > 0$ zodanig dat $g'(b) = \frac{g(x) - g(b)}{x - b}$. Er is gegeven dat $g'(b) > 0$, verder aangezien $x \in]b - \delta, b[$ volgt dat $x - b < 0$. Dus er moet gelden dat $g(x) - g(b) < 0$ en dus $g(x) < g(b)$.

- d) Te bewijzen: Er bestaat een $c \in]a, b[$ waarin g zijn minimum op $[a, b]$ aanneemt.

Bewijs: Aangezien g continu en $[a, b]$ een gesloten, begrensd en niet leeg deel van $\mathbb{R}$ is, volgt uit de maximum-minimum stelling dat g een minimum en een maximum aanneemt op $[a, b]$. Verder volgt uit (b) en (c) dat dit minimum niet in $g(a), g(b)$ aangenomen kan worden, aangezien er een $\delta_1 > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in]a, a + \delta_1[$ geldt $g(x) < g(a)$ en er bestaat een $\delta_2 > 0$ zodanig dat voor alle $y \in]b - \delta_2, b[$ geldt $g(y) < g(b)$. Aangezien $]a, a + \delta_1[\cap [a, b]$ en $]b - \delta_2, b[\cap [a, b]$ allebei niet leeg zijn, volgt dus dat er $z, \alpha \in [a, b]$ zodanig dat $g(z) < g(a)$ en $g(\alpha) < g(b)$. Dus dit minimum wordt aangenomen voor een $c \in]a, b[$.

e) Te bewijzen: Er bestaat een $c \in]a, b[$ zodanig dat $g'(c) = 0$.

Bewijs: Claim: Er bestaat een $z \in [a, d[$ zodanig dat $g(z) \in]g(d), g(b)[$, met $g(d)$ met minimum op $[a, b]$.

Bewijs: Er geldt dat voor alle waarden in $y \in]g(d), g(a)[$ een $x \in [a, d[$ bestaat zodanig dat $g(x) = y$, aangezien g continu. Verder geldt er dat aangezien zowel $]g(d), g(a)[$ als $]g(d), g(b)[$ niet leeg, want $g(d) < g(a)$ en $g(d) < g(b)$, dat $]g(d), g(b)[\cap]g(d), g(b)[$ niet leeg is. Dus er bestaat een $z \in [a, d[$ zodanig dat $g(z) \in]g(d), g(b)[$.

Claim: Er bestaan $x, y \in [a, b]$ zodanig dat $g(x) = g(y)$ en $x \neq y$.

Bewijs: Kies $x \in [a, d[$ zodanig dat $g(x) \in]g(d), g(b)[$, met $g(d)$ het minimum van g op $[a, b]$. Dan volgt uit de tussenwaarde stelling dat er een $y \in]d, b]$ bestaat zodanig dat $g(y) = g(x)$. Verder, aangezien $x \in [a, d[$ en $y \in]d, b]$, volgt dat $x \neq y$. Dus x, y die voldoen aan de eisen bestaan.

Dan, aangezien g differentieerbaar en dus continu, volgt uit de stelling van Rolle dat er een $c \in]x, y[\subseteq]a, b[$ bestaat zodanig dat

$$g'(c) = 0$$

Dus zo'n $c \in]a, b[$ bestaat.

f) Te bewijzen: Gegeven een differentieerbare functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f'(a) < f'(b)$. Dan geldt er dat voor iedere $p \in \mathbb{R}$ met $f'(a) < p < f'(b)$ een $c \in]a, b[$ bestaat zo dat $f'(c) = p$.

Bewijs: Zij $p \in \mathbb{R}$ met $f'(a) < p < f'(b)$. Stel $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ als voorheen door $g(x) = f(x) - px$. We vinden $g'(x) = f'(x) - p$ met $g'(a) < 0$ en $g'(b) > 0$, want $f'(a) < p < f'(b)$. Dan volgt uit (e) dat er een $c \in]a, b[$ bestaat zodanig dat $g'(c) = 0$. Dus

$$g'(c) = f'(c) - p = 0$$

Voor deze c volgt dat $f'(c) = p$.