

Inleveropdracht 6.6 Analyse

isabel
kurvers
gbg0434

Gegeven diff functie $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g'(a) < 0$, $g'(b) > 0$.

a) Zij $r \in \mathbb{R}$, $g'(a) < r < 0$. Toon aan:

$$\exists \delta > 0 \forall x \in]a, a+\delta[: g(x) < g(a) + r(x-a)$$

We weten per definitie: $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$

en $g'(a) < r < 0$, dus

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < r$$

We willen aantonen dat er een $\delta > 0$ bestaat zdd $\forall x \in]a, a+\delta[$

$$g(x) < g(a) + r(x-a) \Leftrightarrow \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < r$$

(zolang $x - a > 0$, maar dit is waar want $x \in]a, a+\delta[$)

Dus we moeten aantonen dat

$$\exists \delta > 0 \forall x \in]a, a+\delta[: \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Hierbij gebruiken we de definitie van een convergente functie: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ als $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \text{ als } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ zdd}$$
$$|x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 0 < \varepsilon$$

Aangezien dit altijd waar is, betekent dit dat we δ willekeurig (> 0) kunnen kiezen. Dus

we definiëren: $\delta = 1$. Dan geldt:

$$\forall x \in]a, a+1[: \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}, \text{ want}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \text{ Dus}$$

$\exists \delta > 0 \forall x \in]a, a+\delta[: \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$
 en omdat we weten dat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} < r$$

geldt:

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)-g(a)}{x-a} < r$$

en omdat $x-a > 0$:

$$\Leftrightarrow g(x)-g(a) < r(x-a)$$

$$\Leftrightarrow g(x) < g(a) + r(x-a)$$

b) Uit opgave a) weten we dat als er een $r \in \mathbb{R}$, $g'(a) < r < 0$, dan: $\exists \delta > 0 \forall x \in]a, a+\delta[$ zdd $g(x) < g(a) + r(x-a)$. En omdat $r < 0$ en $x-a > 0$, weten we $g(a) + r(x-a) < g(a)$, dus weten we: $\exists \delta > 0 \forall x \in]a, a+\delta[: g(x) < g(a)$.

c) We weten opnieuw per definitie dat geldt:

$$g'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} > 0$$

~~Wij weten dus dat er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in]b-\delta, b+\delta[$ geldt: $\frac{g(x)-g(b)}{x-b} > 0$.~~

Dan gaan we eerst bewijzen

$$\text{dat } \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = \frac{g(x)-g(b)}{x-b} :$$

per definitie is dit het geval als geldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x-b| < \delta \Rightarrow \left| \frac{g(x)-g(b)}{x-b} - \frac{g(x)-g(b)}{x-b} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 0 < \varepsilon$$

Aangezien dit altijd geldt, onafhankelijk van de ε , kunnen we de $\delta > 0$ willekeurig kiezen. Definieer $\delta = 1$.

Dan weten we dat er een $\delta > 0$ bestaat zodat:

$$\forall x \in]b-1, b[: \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = \frac{g(x)-g(b)}{x-b} > 0$$

Verder weten we dat $x-b < 0$, omdat $x \in]b-1, b[$.

Dus als $x-b < 0$ en $\frac{g(x)-g(b)}{x-b} > 0$, dan geldt:
 $g(x)-g(b) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(b)$.

d) Uit opgave b) en c) weten we dat zowel vanuit a gezien de grafiek dalend is tot een bepaalde afstand van a (δ), en dat vanuit b terugkijkend gezien de grafiek ook daalt tot een bepaalde afstand van b (een andere δ). Dus er is een punt waar de grafiek van beide zijdes naar daalt en dit punt is dan dus per definitie een minimum van g . Dus $\exists c \in]a,b[$ (want beide δ 's zijn ongetuigd aan 0 , dus a en b zijn niet zelf het minimum) zdd $\min_{[a,b]} g = g(c)$.

e) Volgens lemma 4.40 geldt, als g een extremum heeft in $c \in]a,b[$, c een inwendig punt is van $[a,b]$, en g diff is in c , dat dan $g'(c) = 0$. We weten dat $c \in]a,b[$, dus $c \in]a,b[$. Verder is c een inwendig punt van $[a,b]$, want $c \neq a, b$, dus $\exists \delta > 0 : B(c; \delta) \subset]a,b[$. Omdat is gegeven dat g een differentieerbare functie is, dus alle voorwaarden voldoet, dus $\exists c \in]a,b[: g'(c) = 0$.

f) Gegeven de diff functie $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f'(a) < f'(b)$. TB: $\forall p \in \mathbb{R}$ met $f'(a) < p < f'(b)$, $\exists c \in]a,b[$ zdd $f'(c) = p$.

Definieer $g(x) = f(x) - px$ een diff functie op $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dan $g'(x) = f'(x) - p$. Aangezien $f'(a) < p$, geldt: $g'(a) = f'(a) - p < 0$. Evenzo, omdat $f'(b) > p$, geldt: $g'(b) = f'(b) - p > 0$. Dit geldt voor iedere $p \in \mathbb{R}$.

met $f'(a) < p < f'(b)$. Nu weten we uit opgaven
 a, b, c, d en e dat als $g'(a) < 0$ en $g'(b) > 0$, er
een $c \in]a, b[$ bestaat zodat $g'(c) = 0$. Verder was
 $g'(c) = f'(c) - p = 0 \Leftrightarrow f'(c) = p$. Dus $\forall p \in \mathbb{R}$
met $f'(a) < p < f'(b)$, $\exists c \in]a, b[$ zdd $f'(c) = p$. $\square$